

عصر جمعه
۸۶/۱۲/۳

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دوره های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل
سال ۱۳۸۷

مجموعه ریاضی (ریاضی محض - ریاضی کاربردی - آموزش ریاضی)
(کد ۱۲۰۸)

شماره داوطلبی:

نام و نام خانوادگی داوطلب:

مدت پاسخگویی: ۲۱۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۱۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	ریاضیات عمومی	۳۰	۳۱	۶۰
۳	معادلات دیفرانسیل	۲۵	۶۱	۸۵
۴	آمار و احتمال	۲۵	۸۶	۱۱۰

اسفند ماه سال ۱۳۸۶

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the number of the answer (1), (2), (3), or (4) that best completes the sentence. Then mark your choice on your answer sheet.

- 1- Copies of the documents are available for ----- at local libraries.
1) inspection 2) simulation 3) attribution 4) constitution
- 2- It is perhaps ----- that advanced technology will increase the pressure on workers.
1) eventual 2) inherent 3) potential 4) inevitable
- 3- The finance director has announced that ----- on spending have forced the company to rethink its plans.
1) variables 2) implications 3) constraints 4) procedures
- 4- Certain forms of mental illness can be ----- by food allergies.
1) founded 2) triggered 3) assigned 4) disregarded
- 5- Under mandatory sentencing, the court has no authority to ----- the prison term.
1) release 2) modify 3) diminish 4) interact
- 6- In some areas, floodwaters caused ----- damage and a great loss of life.
1) empirical 2) persistent 3) successive 4) widespread
- 7- Offered the position of chairman, Smith -----, preferring to keep his current job.
1) resolved 2) declined 3) conceived 4) encountered
- 8- She holds the ----- of having been the first woman editor of the Harvard Law Review.
1) coherence 2) distinction 3) inclination 4) complement
- 9- Studies have shown that insect populations ----- wildly from year to year.
1) convert 2) maintain 3) fluctuate 4) distribute
- 10- With so little money available, repairs must remain a low -----.
1) priority 2) application 3) incentive 4) adjustment

PART B: Grammar

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each blank. Then mark your choice on your answer sheet.

If you ask most people to list what makes them (11) ----- someone on first meeting, they (12) ----- personality, intelligence, and sense of humor. But they're probably deceiving (13) ----- . The characteristic that impresses people the most (14) ----- meeting anyone, from a job applicant (15) ----- -- a classmate, is appearance.

- 11- 1) like 2) to like 3) being liked 4) liking
- 12- 1) will say 2) are to say 3) are saying 4) will be saying
- 13- 1) it 2) them 3) themselves 4) one another
- 14- 1) is 2) for 3) when 4) during
- 15- 1) as 2) to 3) or 4) for

با توجه به متن زیر به سؤال‌های ۱۶ تا ۲۰ پاسخ دهید.

1- The role of mathematical models is far from being exhausted in studying natural laws. 2- Their significance is constantly being increased by the natural tendency toward optimization of technical processes and technological systems for planning experiments. 3- In the process of research, and in the desire to develop a detailed representation of the processes under study, we are driven to the construction of even more complex mathematical models, which require refined and generally applicable mathematical methods. 4- Mathematical models are implemented on an electronic computer by the methods of numerical mathematics, which are continually being perfected in keeping with developments in computer technology.

۱۶- گزینه صحیح را انتخاب کنید.

- 1) Development of new methods of numerical analysis has led to the development of computer technology.
- 2) Due to increase in tendency toward optimization mathematical modeling of natural laws has lost its significance.
- 3) The trend for optimization of technological systems has increased the need for more sophisticated mathematical methods.
- 4) The development of more refined numerical methods has replaced the need for optimization of technical processes.

۱۷- مفهوم **implemented** در جمله ۴ به نزدیکترین است.

- 1) studied 2) carried out 3) used 4) treated

۱۸- مفهوم **driven to** در جمله ۳ به نزدیکترین است.

- 1) directed to 2) closer to 3) let to 4) forced to

۱۹- مفهوم کلمه **significance** در جمله ۲ به نزدیکترین است.

- 1) advantage 2) reliability 3) use 4) importance

۲۰- مفهوم **exhausted** در جمله ۱ به نزدیکترین است.

- 1) diminished 2) developed 3) tired 4) tried

برای سؤال‌های ۲۱ تا ۲۵ گزینه صحیح را برای نقطه چین انتخاب کنید.

21- A forest is ----- community of many forms of life.

- 1) a quiet 2) a feeble 3) a morbid 4) an active

22- In the northern part of Iran, where there is ----- rain, you can find a variety of plant life.

- 1) ample 2) scant 3) not enough 4) showering

23- Unemployment is ----- responsible for the increasing crime rate.

- 1) rarely 2) scarcely 3) largely 4) hardly

24- He is -----, if not taller than his brother.

- 1) as tall 2) as tall as 3) shorter 4) tallest

25- To make him angry, she ----- let him know she was not going to visit his parents.

- 1) deliberately 2) hastily 3) kindly 4) marginally

با توجه به متن زیر بهترین انتخاب را برای نقطه چین در سؤال‌های ۲۶ تا ۳۰ تعیین کنید و سپس آن را در پاسخ نامه علامت بزنید.

We define a *rotation* in a three-dimensional space as an orthogonal transformation of determinant +1. Then the corollary asserts that every rotation in three dimensions is a rotation about an axis, the axis being the line determined by the vector left fixed. This fact is of fundamental importance in mechanics and was proved with the use of an interesting geometrical argument by Euler. We shall see that it is also the key to the classification of finite symmetry groups in R_3 . Our presentation of this material is based on the introductory discussion in Section 14 and the proof of the main theorem is taken from Weyl's book (see the Bibliography). Apart from its geometrical interest, Weyl's argument gives a penetrating introduction to the theory of finite groups.

Let us make the problem precise. By a *finite symmetry group* in three dimensions we mean a finite group of orthogonal transformations in R_3 . For simplicity we shall determine the *finite groups of rotations* in R_3 and indicate in the exercises the connection with the general problem. Let us begin with a list of some examples of finite rotation groups in R_3 . By the *order* of a finite group we mean the number of elements in the group. The cyclic group C_n of order n and the dihedral group D_n of order $2n$, discussed in Section 14, are the first examples.

- 26- **The term order is used to refer to the number of elements in -----.**
- 1) any symmetry group
 - 2) both cyclic and dihedral groups
 - 3) infinite groups only
 - 4) finite and infinite groups
- 27- **Any finite symmetry group in R_3 is -----.**
- 1) any infinite group in R_3
 - 2) any finite group in R_3
 - 3) composed of any set of orthogonal transformations
 - 4) any group of orthogonal transformations having an order
- 28- **An orthogonal transformations of determinant +1 in three dimensions as a rotation about an axis -----.**
- 1) can be proved inductively
 - 2) can not be proved geometrically
 - 3) has a geometric proof
 - 4) was proved by Euler using a geometric example
- 29- **Weyl's argument is -----.**
- 1) not attractive
 - 2) not interesting geometrically
 - 3) not useful for the theory of finite group
 - 4) interesting geometrically while useful for the theory of finite groups
- 30- **Classification of finite symmetry groups in R_3 is facilitated by -----.**
- 1) the introduction of deductive reasoning
 - 2) the notion of rotation
 - 3) the introduction of inductive reasoning
 - 4) geometric interpretations

۳۱- تابع $f(x) = x^2 \cos x$ دارای نمایش سری به صورت $f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots$ است، که برای تمام مقادیر x برقرار است. C_9 عبارت است از:

(۱) $-\frac{1}{6!}$ (۲) $-\frac{1}{4!}$ (۳) $\frac{1}{6!}$ (۴) $\frac{1}{4!}$

۳۲- حجم جسم محدود به رویه $z = 9 - x^2 - y^2$ در \mathbb{R}^3 و $z = 0$ عبارت است از:

(۱) $\frac{27\pi}{2}$ (۲) 18π (۳) $\frac{81\pi}{2}$ (۴) 81π

۳۳- برای تابع برداری با ضابطه $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ مقدار $\frac{(F' \times F'') \cdot F'''}{|F' \times F''|^2}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) ۱

۳۴- با تغییر دستگاه از دکارتی به قطبی اگر $z = x^2 - y^2$ ، آنگاه $\frac{\partial z}{\partial r}$ کدام است؟

(۱) $-2r^2 \sin \theta$ (۲) $-2r \sin \theta$ (۳) $r \sin 2\theta$ (۴) $2r \cos 2\theta$

۳۵- اگر f تابعی انتگرال پذیر و متناوب با دوره تناوب c باشد مقدار $\int_c^{a+c} f(x) dx$ کدام است؟

(۱) $\int_0^a f(x) dx$ (۲) $\int_0^c f(x) dx$

(۳) $\int_a^c f(x) dx$ (۴) $\int_0^c f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$

۳۶- در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله با ضابطه زیر کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

$$a_0 = 1, \quad a_n = \min\{a_{n-1}, \cos n\}$$

(۱) چون کران دار نیست، پس واگرا است.

(۲) نه نزولی و نه صعودی است و واگرا است.

(۳) چون صعودی و کراندار از بالا است، پس بنا به قضیه همگرایی یکنوا، همگرا است.

(۴) چون نزولی و کراندار از پایین است، پس بنا به قضیه همگرایی یکنوا، همگرا است.

۳۷- اگر بدانیم که مقدار انتگرال $\int_c (x + 2y + az) dx + (bx - 3y - z) dy + (4x + cy + 2z) dz$ مستقل از مسیر

است، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

(۱) -۵ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۸- فرض کنیم a عدد حقیقی دلخواهی باشد. در این صورت همواره دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ از اعداد اصم موجود

است به قسمی که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \quad (1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = a \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + 1}{a_n} = a \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + 1}{a_n^2} = |a| \quad (4)$$

۳۹- مشتق تابع $\cos^{-1}(1 + tg^{-1}\sqrt{x})$ برابر است با:

$$\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x} - (tg^{-1}\sqrt{x})^2}} \quad (1) \quad \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x} - (tg^{-1}\sqrt{x})^2}} \quad (2)$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x^2)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x} - (tg^{-1}\sqrt{x})^2}} \quad (3) \quad \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x^2)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x} - (tg^{-1}\sqrt{x})^2}} \quad (4)$$

۴۰- به ازای کدام مقدار m ، میدان برداری $F(x, y, z) = (3x^2 + y^2)\vec{i} + mxy\vec{j} - 3z^2\vec{k}$ یک میدان پایستار است؟

$$-2 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

۴۱- اگر \vec{T} برداریکه مماس بر دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ باشد، $\oint_C \vec{T} \cdot d\vec{R}$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{4} \quad (1) \quad 0 \quad (2) \quad \pi \quad (3) \quad 2\pi \quad (4)$$

۴۲- اگر تابع f چنان باشد که $x^2 \cos \pi x = \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt$ آن گاه $f(2)$ برابر است با:

$$-16\pi \quad (1) \quad -8 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 32 \quad (4)$$

۴۳- مختصات نزدیک‌ترین نقاط روی هذلولی $y^2 - x^2 = 4$ از نقطه $(2, 0)$ عبارتند از:

$$(0, \pm 1) \quad (1) \quad (\pm 2, 0) \quad (2) \quad (1, \pm \sqrt{5}) \quad (3) \quad (1, \pm \sqrt{8}) \quad (4)$$

۴۴- معادله صفحه مماس بر رویه $z = e^{2+2x+y^2}$ در نقطه $(-6, 3, 1)$ کدام یک از موارد زیر است؟

$$2x + 6y - z = -5 \quad (1) \quad 2x + 6y - z = 5 \quad (2)$$

$$x + y - z = -2 \quad (3) \quad x + y - z = -4 \quad (4)$$

۴۵- مقدار انتگرال $\int \int_R (x^2 y^2 + xy^2) dx dy$ که در آن R مستطیل $1 \leq x \leq -1$ و $0 \leq y \leq 1$ می باشد کدام

است؟

$$0 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

۴۶- با فرض $F(x, y) = \int_0^{xy} \sin \sqrt{t} dt$ ، $\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۴۷- اندازه انحناء ماریچ $x = t, y = \frac{1}{3}t^2, z = \frac{1}{3}t^2$ در نقطه $A(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\sqrt{2}$

۴۸- کدام گزینه جواب انتگرال زیر است؟ $\int \cos(\ln x) dx$

(۱) $x \cos(\ln x)$ (۲) $x \sin(\ln x)$ (۳) $\frac{1}{x}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$ (۴) $\frac{1}{x}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$

۴۹- کدام گزینه معادله صفحه گذرا بر نقطه $A(4, 0, -2)$ و عمود بر دو صفحه $x - y + z = 0$ و $2x + y - 4z = 5$ است؟

(۱) $x + 2y + z = 2$ (۲) $2x - y - z = 1$ (۳) $x - 2y + z = 2$ (۴) $2x - y - z = 2$

۵۰- طول قوس منحنی $y = \text{Arcsin } x \pm \sqrt{1 - x^2}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۵۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{\pi}{4} - \text{tg}^{-1} x) \text{cotg}(\frac{1}{x})$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) ∞

۵۲- اگر $f(\int_0^x \frac{e^t}{t^2 + 1} dt) = x$ و برای $f(0) = a, a \in \mathbb{R}$ بر حسب a برابر است با:

(۱) $\frac{a^2 + 1}{e^a}$ (۲) $\frac{e^a}{a^2 - 1}$ (۳) $\frac{e^a}{a^2 + 1}$ (۴) $\frac{a^2 - 1}{e^a}$

۵۳- مقدار حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \dots (1 + \frac{n}{n}) \right\}^{\frac{1}{n}}$ برابر است با:

(۱) $\frac{4}{e}$ (۲) $\frac{e}{4}$ (۳) ۱ (۴) ∞

۵۴- اگر تابعی مشتق پذیر بوده و $f(0) = 1$ و $f'(x) = \frac{1}{x} f(x)$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

(۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$ (۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ (۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

۵۵- فرض کنید $a_1 > 0$ و $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + A^2 a_n^{-1})$ ($n = 1, 2, \dots$) کدام گزینه در مورد دنباله $\{a_n\}$ صحیح است؟ ($A > 0$)

- (۱) واگرا است. (۲) صعودی و از بالا کراندار است.
(۳) نزولی از پایین کراندار است. (۴) یکنوا و کراندار است.

۵۶- فرض کنید f و g توابعی انتگرال پذیر بر $[0, 1]$ باشند و $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$ در این صورت اگر $f \geq g$ بر $[0, 1]$ یا $f \leq g$ بر $[0, 1]$ آنگاه با فرض آنکه بر $[0, 1]$ پیوسته باشد، داریم $f = g$ بر $[0, 1]$.

- (۱) $f - g$ (۲) $f + g$ (۳) f یا g (۴) g, f

۵۷- به ازای چه مقادیری از a در گزینه‌های زیر تابع $f(x)$ در صفر پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

- (۱) $e^{-\frac{1}{e}}$ (۲) $e^{-\frac{1}{2}}$ (۳) $e^{\frac{1}{2}}$ (۴) $e^{\frac{1}{e}}$

۵۸- حاصل $\int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1} dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(e^2 + \frac{1}{e})$ (۲) $\frac{1}{2}(e^2 - \frac{1}{e})$ (۳) $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e^2})$ (۴) $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e^2})$

۵۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n k^x - n}{x}$ کدام است؟

- (۱) $\ln 2$ (۲) $\ln n$ (۳) $\ln n!$ (۴) $\ln(n+1)$

۶۰- $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

$$\frac{e^{-x^2} + 2x e^{-2x^2}}{e^{-x^2}}$$

۶۱ - کدام گزینه جواب دستگاه $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases}$ است؟

(۱) $x_1 = c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t}$ $x_2 = c_1 e^{\sqrt{3}t}(\sqrt{3} - 1) - c_2 e^{-\sqrt{3}t}(\sqrt{3} + 1)$

(۲) $x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t}$ $x_2 = c_1 e^{2t}(\sqrt{3} - 1) - c_2 e^{2t}(\sqrt{3} + 1)$

(۳) $x_1 = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t}$ $x_2 = c_1 e^{2t}(\sqrt{3} + 2) - c_2 e^{2t}(\sqrt{3} + 2)$

(۴) $x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$ $x_2 = c_1 e^{2t}(\sqrt{3} - 2) + c_2 e^{2t}(\sqrt{3} + 2)$

۶۲ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 1$ کدام است؟

(۱) $y = (c_1 + c_2 \ln x)x + \frac{c_2}{x} + \frac{1}{4} \ln x$

(۲) $y = \frac{(c_1 + c_2 \ln x)}{x} + c_2 x + \frac{1}{4} x \ln x$

(۳) $y = (c_1 + c_2 x \ln x)x + \frac{c_2}{x} + \frac{1}{4} \ln x$

(۴) $y = (c_1 + c_2 \ln x)x + \frac{c_2}{x} + \frac{1}{4} \ln x$

۶۳ - معادله $y'' + (p + \frac{1}{x} - \frac{x^r}{x})y = 0$ (برای عدد ثابت p) دارای جوابی بصورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با کدام فرمول بازگشتی است؟

(۱) $(n+1)(n+2)a_n + (p-n)a_{n+2} = 0$

(۲) $(n+1)(n+2)a_{n+2} + (p-n)a_n = 0$

(۳) $(n+1)(n+2)a_{n+2} + (p + \frac{1}{x})a_n - \frac{1}{x}a_{n-2} = 0$

(۴) $(n+1)(n+2)a_{n-2} + (p + \frac{1}{x})a_n - \frac{1}{x}a_{n+2} = 0$

۶۴ - چهار جمله اول جواب معادله دیفرانسیل $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$ در $x = 0$ کدام است؟

(۱) $y(x) = a_1 x + a_0 (1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \dots)$

(۲) $y(x) = a_0 (1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4 \times 3}x^4 + \dots) + a_1 x$

(۳) $y(x) = a_0 (1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^4) + \frac{1}{3! \times 2}x^6 + \dots$

(۴) $y(x) = a_0 x + \frac{a_1}{4}x^2 + \frac{a_0}{4}x^4 + \dots$

۶۵ - فرض کنید x و y توابعی بر حسب t باشند. جواب عمومی دستگاه زیر به چند ثابت دلخواه بستگی دارد؟

(۱) $\begin{cases} Dx + (D^2 + 1)y = 1 + e^t \\ (D^2 - 1)x + D^2 y = 1 - e^t \end{cases} \quad (D = \frac{d}{dt})$

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) دستگاه دارای فقط یک جواب خصوصی است.

۶۶ - اگر $\emptyset(x)$ یک جواب معادله انتگرالی $y(x) = e^{2x} + \alpha \int_x^{\infty} \sin(x-s) \frac{y(s)}{s^2} ds$ باشد، آنگاه $\emptyset(x)$ در کدام یک از معادلات دیفرانسیل زیر صدق می کند؟

(۱) $\emptyset''(x) - (1 + \frac{\alpha}{x^2})\emptyset(x) = 0$

(۲) $\emptyset''(x) + (1 - \frac{\alpha}{x^2})\emptyset(x) = 0$

(۳) $\emptyset''(x) + (1 + \frac{\alpha}{x^2})\emptyset(x) = 0$

(۴) $\emptyset''(x) - (x + \frac{\alpha}{x^2})\emptyset(x) = 0$

۶۷ - ضریب جمله سوم از جواب معادله $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$ عبارتست از:

(۴) $-\frac{1}{8 \times 36}$

(۳) $-\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{16 \times 4}$

(۱) صفر

۶۸- اگر $y = e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$ باشد. جواب دیگر معادله از حل کدام گزینه به دست می آید؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & x \frac{d^2}{dx^2}(e^{-x}y) - (x-2) \frac{d}{dx}(e^{-x}y) \\ (2) \quad & x \frac{d^2}{dx^2}(e^{-x}y) + (x-2) \frac{d}{dx}(e^{-x}y) \\ (3) \quad & x \frac{d^2}{dx^2}(e^{-x}y) + (x+2) \frac{d}{dx}(e^{-x}y) \\ (4) \quad & x \frac{d^2}{dx^2}(e^{-x}y) - (x+2) \frac{d}{dx}(e^{-x}y) \end{aligned}$$

۶۹- فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله خطی همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ بر بازه I باشند. کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) رونسکی دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ همواره مخالف صفر است.
- (۲) اگر توابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در I دارای ماکزیمم و یا می نیمم باشند وابسته خطی اند.
- (۳) اگر معادلات $y_1(x) = 0$ و $y_2(x) = 0$ در I دارای جواب باشند آنگاه دو جواب وابسته خطی اند.
- (۴) اگر $y_1(x)$ در نقطه ای از I بر محور x مماس باشد آنگاه $y_2(x)$ همواره صفر است.

۷۰- یک جواب معادله لژاندر $y'' - 2xy' + 2y = 0$ ، $y_1 = x$ ، $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ است. جواب دیگر این معادله که مستقل خطی با این جواب باشد کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & y_2 = \frac{x}{3} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 1 \\ (2) \quad & y_2 = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} \\ (3) \quad & y_2 = \frac{x}{3} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1 \\ (4) \quad & y_2 = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

۷۱- در صورتی که روش فرینیوس را برای حل معادله $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$ به ازای ریشه بزرگتر معادله مشخصه بکار ببریم، معادله

بازگشتی ضرایب کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+4)} \\ (2) \quad & a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+1)(n+3)} \\ (3) \quad & a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+4)} \\ (4) \quad & a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+3)} \end{aligned}$$

۷۲- کدام گزینه در مورد معادله $(\ln x)y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ درست است؟

- (۱) $x = 1$ یک نقطه منفرد نامنظم معادله فوق است.
- (۲) $x = 1$ یک نقطه منفرد منظم است و حداکثر شعاع همگرایی جواب به شکل سری فرینیوس برابر ۱ است.
- (۳) $x = 1$ یک نقطه منفرد منظم است و حداقل شعاع همگرایی جواب به شکل سری فرینیوس برابر ۱ است.
- (۴) $x = 1$ یک نقطه عادی است و حداقل شعاع همگرایی سری جواب برابر ۱ است.

۷۳- کدام گزینه جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y(x^2e^{xy} - y)dx + x(x^2e^{xy} + y)dy = 0$ است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & e^{xy} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = c \\ (2) \quad & e^{xy} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = c \\ (3) \quad & e^{xy} + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = c \\ (4) \quad & 2e^{xy} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = c \end{aligned}$$

۷۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{1}{y} \ln(1+y'^2) - \ln y' - x + 2 = 0$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \ln|\cos(c-y)| - x - 2 = 0 \\ (2) \quad & \ln|\cos(c-y)| + x - 1 = 0 \\ (3) \quad & \ln|\sin(c-y)| - x + 1 = 0 \\ (4) \quad & \ln|\sin(c-y)| + x - 2 = 0 \end{aligned}$$

۷۵- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = y \operatorname{tg} x - y^2 \operatorname{sec} x$ کدام است؟

$$y = \frac{\operatorname{sec} x}{c + \operatorname{tg} x} \quad (۲)$$

$$y = \frac{\cos x}{c + \operatorname{tg} x} \quad (۴)$$

$$y = \frac{1}{c + \operatorname{tg} x} \quad (۱)$$

$$y = \frac{\operatorname{sec} x}{c + \operatorname{cot} x} \quad (۳)$$

۷۶- یک عامل انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل $e^x(x+1)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$ کدام است؟

$$f(x) = ce^x \quad (۲)$$

$$f(x) = ce^x + x \quad (۴)$$

$$f(x) = ce^{-x} \quad (۱)$$

$$f(x) = ce^x - x \quad (۳)$$

۷۷- معادله دیفرانسیل خانواده‌ای از منحنی‌های به معادله $x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y = 0$ کدام است؟

$$(x^2 + y^2)y'' + 2[(y')^2 + 1][y - xy'] = 0 \quad (۲)$$

$$(x^2 + y^2)y'' + 2[(y')^2 - 1][y + xy'] = 0 \quad (۴)$$

$$(x^2 - y^2)y'' + 2[(y')^2 + 1][y - xy'] = 0 \quad (۱)$$

$$(x^2 - y^2)y'' + 2[(y')^2 + 1][y + xy'] = 0 \quad (۳)$$

۷۸- مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} t.e^{-2t} \cos t dt$ کدام است؟

$$-\frac{2}{25} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{25} \quad (۴)$$

$$-\frac{2}{25} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{25} \quad (۳)$$

۷۹- کدام گزینه جواب تبدیل لاپلاس معکوس $L^{-1}\left\{\frac{7s-4}{s^2-4s+20}\right\}$ است؟

$$2 \cos 4t + 2 \sin 4t \quad (۲)$$

$$2e^t \cos 4t + 2e^t \sin 4t \quad (۴)$$

$$7e^{2t} \cos 4t + 2e^{2t} \sin 4t \quad (۱)$$

$$2 \cos 4t - 2 \sin 4t \quad (۳)$$

۸۰- تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = |\sin at|$ ، $(a > 0)$ کدام است؟

$$\frac{a}{s^2 + a^2} \operatorname{tgh}\left(\frac{\pi s}{2a}\right) \quad (۲)$$

$$\frac{a}{s^2 + a^2} \operatorname{tgh}\left(\frac{\pi s}{a}\right) \quad (۴)$$

$$\frac{a}{s^2 + a^2} \operatorname{cotgh}\left(\frac{\pi s}{a}\right) \quad (۱)$$

$$\frac{a}{s^2 + a^2} \operatorname{cotgh}\left(\frac{\pi s}{2a}\right) \quad (۳)$$

۸۱- جواب معادله انتگرال $y(x) = x^2 + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt$ کدام است؟

$$y(x) = x^2 - \frac{1}{4}x^2 \quad (۲)$$

$$y(x) = x^2 + x^2 \quad (۴)$$

$$y(x) = x^2 - x^2 \quad (۱)$$

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{4}x^2 \quad (۳)$$

۸۲- نوع معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ کدام است؟ و اگر $y = x$ یک جواب آن باشد، جواب دیگر مستقل خطی آن کدام است؟

$$y = -1 + \frac{x}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ و بسل } (۱)$$

$$y = -1 + \frac{x}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ لزاندر } (۲)$$

$$y = 1 - \frac{x}{4} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \text{ و ریکانی } (۳)$$

(۴) خطی مرتبه دوم و جواب مستقل خطی دیگری نسبت به $y = x$ ندارد.

۸۳- کدام گزینه در مورد معادله دیفرانسیل $y' = x^{\frac{1}{5}}$ با شرط اولیه $y(0) = 0$ درست است؟

(۱) به ازای هر $a > 0$ ، در بازه $[0, a]$ معادله فوق دارای تعداد نامتناهی جواب است.

(۲) به ازای هر $a > 0$ ، در بازه $[0, a]$ ، معادله فوق دارای جواب یکتاست.

(۳) معادله فوق دارای جواب نیست.

(۴) به ازای هر $a > 0$ ، در بازه $[0, a]$ ، معادله فوق دارای تعداد متناهی جواب است.

۸۴- به ازای دو تابع $y_1 = x|x|$ و $y_2 = x^2$ روی بازه $(-1, 1)$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) ترکیب خطی دو تابع جواب عمومی یک معادله خطی مرتبه دوم همگن است.

(۲) دو تابع وابسته خطی و رونسکین آنها صفر است.

(۳) دو تابع مستقل خطی و رونسکین آنها مخالف صفر است.

(۴) دو تابع مستقل خطی و رونسکین آنها صفر است.

۸۵- تبدیل لاپلاس تابع $H'(x-a)$ که در آن $a > 0$ و $H(x-a)$ تابع پلکانی واحد است، کدام است؟

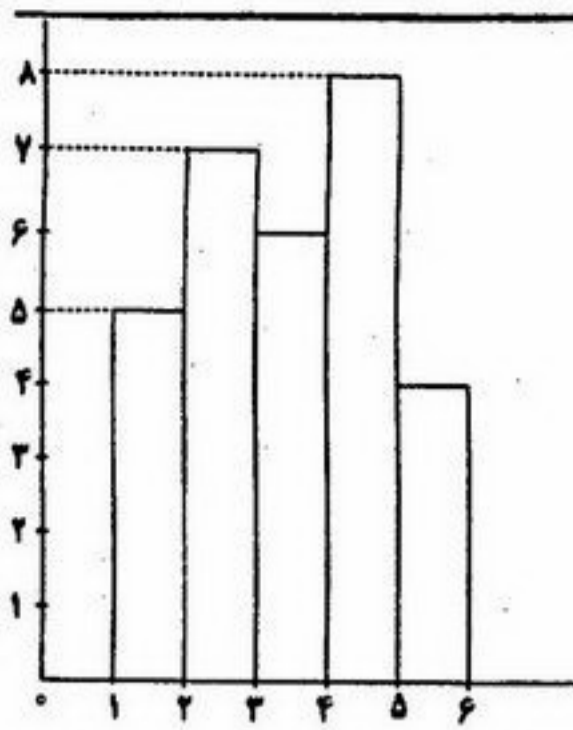
(۴) ۱

(۳) ae^{-s}

(۲) e^{-as}

(۱) $\frac{e^{-as}}{s}$

۸۶ - چارک سوم در هیستوگرام مقابل کدام است؟



(۱) $3/5925$

(۲) $4/5095$

(۳) $4/5625$

(۴) $5/8265$

۸۷ - عددی چهاررقمی را به تصادف نوشته‌ایم. احتمال اینکه کوچکتر از ۷۰۰۰ و بر ۲ قابل قسمت باشد، کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{2}{4}$

(۱) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

۸۸ - از جعبه‌ای حاوی ۹ کارت به شماره‌های یک تا ۹، سه کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه یک در میان زوج و فرد باشند کدام است؟

(۲) $\frac{5}{18}$

(۴) $\frac{70}{84}$

(۱) $\frac{12}{18}$

(۳) $\frac{20}{84}$

۸۹ - فرض کنید A و B دو پیشامد از یک فضای احتمال باشند. اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B|A) = \frac{1}{4}$ ، $P(A|B) = \frac{1}{4}$ ، $X = I_A$ و $Y = I_B$ ، گزینه صحیح کدام است؟

(۱) X و Y مستقلند.

(۲) ضریب همبستگی بین X و Y برابر صفر است اما X و Y مستقل از هم نیستند.

(۳) $P(X^2 + Y^2 = 1) = \frac{1}{4}$

(۴) $P(X^2 - Y^2 = 1) = \frac{1}{4}$

۹۰ - در ظرفی ۳ مهره سیاه و ۶ مهره سفید قرار دارد. ۵ مهره از این ظرف با جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه تعداد مهره‌های سیاه مشاهده شده، عددی فرد باشد کدام است؟

(۲) $\frac{119}{242}$

(۴) $\frac{162}{242}$

(۱) $\frac{82}{242}$

(۳) $\frac{121}{242}$

۹۱ - تعداد تصادفات در یک منطقه دارای توزیع پواسون با مقدار متوسط ۲ تصادف در هر روز می باشد. احتمال اینکه در چهار روز یک هفته هیچ تصادفی رخ ندهد کدام است؟

$$\binom{7}{4} e^{-8}(1 - e^{-1}) \quad (2)$$

$$\binom{7}{3} e^{-8}(1 - e^{-2})^3 \quad (1)$$

$$e^{-8} \quad (4)$$

$$\binom{7}{4} e^{-8} \quad (3)$$

۹۲ - فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان از تابع احتمال زیر باشند

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x, \quad x = 1, 2, \dots$$

اگر $P(X \geq KY) = \frac{2}{15}$ مقدار K کدام است؟

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$(\log_2 15) + 1 \quad (4)$$

$$(\log_2 15) - 1 \quad (3)$$

۹۳ - فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان از تابع احتمال زیر باشند

$$f_p(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

توزیع $Z = X + Y$ کدام است؟

$$(2) \text{ هندسی پارامتر } 2p - 1$$

$$(1) \text{ فوق هندسی}$$

$$(4) \text{ دو جمله ای منفی با پارامترهای } 2 \text{ و } p$$

$$(3) \text{ هندسی با پارامتر } 2p$$

۹۴ - از پاره خطی به طول L ، نقطه ای به تصادف انتخاب می شود احتمال اینکه نسبت طول پاره خط کوچکتر به بزرگتر از $\frac{1}{8}$ کمتر باشد کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

۹۵ - اگر $X \sim E(1)$ ، برای هر $x > 0$ مقدار $P([X] = n, X - [X] > x)$ کدام است؟

$$e^{-x} - e^{-1} \quad (2)$$

$$e^{-x} - 1 \quad (1)$$

$$e^{-n}(e^{-x} - 1) \quad (4)$$

$$e^{-n}(e^{-x} - e^{-1}) \quad (3)$$

۹۶ - فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $N(1, 1)$ باشند. مقدار $P(XY - X - Y + 1 > 0)$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

۹۷ - فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند که در آن

$$E(X) = 1, \quad E(Y) = 2, \quad \text{Var}(X) = 2, \quad \text{Var}(Y) = 3$$

مقدار $\text{Var}(XY)$ کدام است؟

(۲) ۱۷

(۱) ۱۰

(۴) ۳۶

(۳) ۲۱

۹۸ - فرض کنید $X \sim N(0, 1)$ و $T \sim B(1, p)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر $V = \begin{cases} X & ; Y=1 \\ -X & ; Y=0 \end{cases}$ مقدار $\text{Cov}(X, V)$ کدام است؟

(۲) $2q$

(۱) $2p$

(۴) $2p-1$

(۳) $2q-1$

۹۹ - اگر X دارای توزیع پواسون با پارامتریک باشد، مقدار $E(|X - e|)$ کدام است؟

(۲) $1 - 2e - e^{-1}$

(۱) $1 + 2e + e^{-1}$

(۴) $1 - 2e^{-1} - e$

(۳) $e + 2e^{-1} - 1$

۱۰۰ - فرض کنید X یک متغیر تصادفی با $EX = 3$ و $EX^2 = 13$ باشد. کران پایین $P(-2 < X < 8)$ کدام است؟

(۲) ۸۴%

(۱) ۹۸/۷۶%

(۴) ۱۶%

(۳) ۷۵%

۱۰۱ - فرض کنید $X \sim N(1, 2)$ و $Y \sim N(4, 9)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. مقدار $E[X^2 - XY^2] + \text{Var}[E[XY]]$ کدام است؟

(۲) -۲۵

(۱) -۳۰

(۴) -۱۵

(۳) -۲۰

۱۰۲ - یافته‌های یک نمونه تصادفی 2 تایی از $N(0, \sigma^2)$ عبارت است از $x_1 = 1$ و $x_2 = 7$. برآورد درست‌نمایی ماکسیمم (MLE) پارامتر σ کدام

است؟

(۲) ۵

(۱) ۳

(۴) ۱۸

(۳) ۹

۱۰۳ - یک نمونه تصادفی با معدل \bar{X} از چگالی زیر در نظر می گیریم.

$$f(x, \theta) = \begin{cases} (1 + \theta)x^\theta & \theta > 0, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

برآورد گشتاوری پارامتر θ کدام است؟

$$\frac{1 - 2\bar{X}}{\bar{X} + 1} \quad (2) \qquad \frac{1 - 2\bar{X}}{\bar{X} - 1} \quad (1)$$

$$\frac{1 + 2\bar{X}}{\bar{X} + 1} \quad (4) \qquad \frac{1 + 2\bar{X}}{\bar{X} - 1} \quad (3)$$

۱۰۴ - فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع گاما با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0$$

برآوردگر پارامتر β به روش گشتاوری (MME) کدام است؟

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n\bar{X}^2} \quad (2) \qquad \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\bar{X}^2} \quad (1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n\bar{X}} \quad (4) \qquad \frac{n\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (3)$$

۱۰۵ - فرض کنید که Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 یک نمونه تصادفی ۴ تایی از توزیع نمایی با میانگین θ باشد. برای اینکه آماره $W = \alpha \sqrt{Y_1 Y_2 Y_3 Y_4}$ برآوردگری

نااریب برای θ^2 باشد، مقدار α کدام است؟

$$\frac{4}{\pi} \quad (2) \qquad 16 \quad (1)$$

$$\frac{16}{\pi^2} \quad (4) \qquad \frac{12}{\pi^2} \quad (3)$$

۱۰۶ - یافته‌های یک نمونه تصادفی ۳ تایی از توزیعی، با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x) = \frac{\theta 2^\theta}{x^{\theta+1}}; x \geq 2$ عبارت است از: ۴، ۸، ۱۶.

برآورد درست‌نمایی ماکسیم (MLE) پارامتر θ کدام است؟

$$\frac{14}{11} \quad (2) \qquad \frac{11}{14} \quad (1)$$

$$2 \ln 2 \quad (4) \qquad \frac{1}{2 \ln 2} \quad (3)$$

۱۰۷ - نمونه‌ای تصادفی مانند X_1 و X_2 به اندازه ۲ از جامعه‌ای با توزیع یکنواخت در بازه $(0, \theta)$ انتخاب و فرض صفر $H_0: \theta = 1$ در برابر فرض

مقابل $H_1: \theta = \frac{3}{4}$ را رد می‌کنیم هرگاه $X_1 X_2 \geq \frac{1}{9}$. احتمال خطای نوع دوم کدام است؟ (فرض کنید که $\ln 2 = 0.7$ و $\ln 3 = 1.1$)

$$0.2 \quad (2) \qquad 0.1 \quad (1)$$

$$0.8 \quad (4) \qquad 0.4 \quad (3)$$

۱۰۸ - فرض کنید $X \sim B(5, p)$ باشد. علاقمند به آزمون $H_0: p = \frac{1}{4}$ در مقابل $H_1: p = \frac{3}{4}$ هستیم. اگر ناحیه بحرانی آزمون $X \geq 2$ باشد، مقدار (α, β) کدام است؟ (α = احتمال خطای نوع اول، β = احتمال خطای نوع دوم)

$$(1) \left(1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right)$$

$$(2) \left(1 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^5 \right)$$

$$(3) \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right)$$

$$(4) \left(1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^5, \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right)$$

۱۰۹ - اگر یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\theta, 1)$ با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$ به شرح زیر باشد

$$0/25, 0/5, 0/75, 1, 1/5, 2, 2/5, 3, 3/5, 4$$

اگر برای آزمون $H_0: \theta = 0$ در مقابل $H_1: \theta = 1$ ناحیه بحرانی $x_{(1)} > c$ باشد، مقدار $-p$ مقدار $(value - p)$ آزمون کدام است؟

$$(1) e^{-10}$$

$$(2) e^{-7/5}$$

$$(3) e^{-5}$$

$$(4) e^{-2/5}$$

۱۱۰ - می‌خواهیم این فرض صفر را که X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای ۳ و $\frac{1}{4}$ است در برابر فرض مقابل که X دارای توزیع هندسی با

میانگین ۲ است، آزمون کنیم. اگر ناحیه بحرانی به صورت $x \geq c$ و مجموع احتمال‌های دو نوع خطا $\frac{7}{8}$ باشد، مقدار c کدام است؟

$$(1) 0$$

$$(2) 1$$

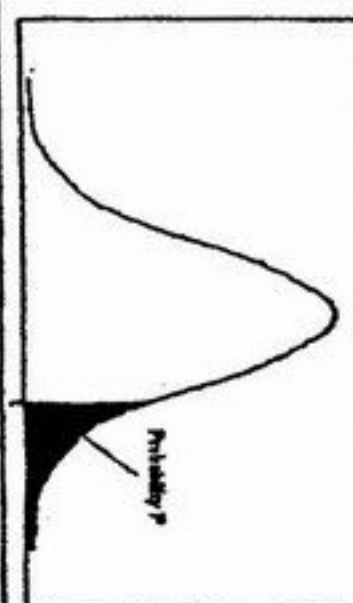
$$(3) 2$$

$$(4) 3$$



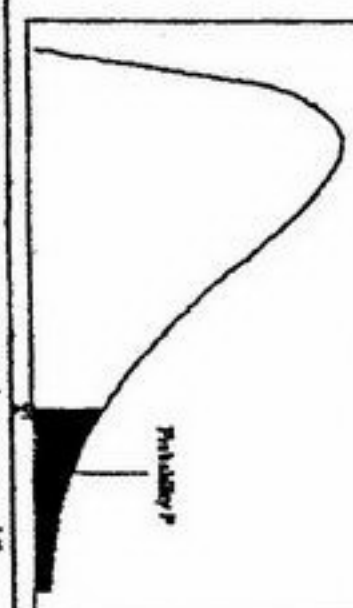
سطح زیر منحنی نرمال استاندارد

z	0.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998



مقادیر بحرانی توزیع F

df	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.110	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.101	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756



مقادیر بحرانی توزیع مربع کای

df	.995	.990	.975	.950	.900	.800	.700	.600	.500	.400	.300	.200	.100	.050	.025	.010	.005
1	4E-5	0.0001	0.0009	0.0039	3.8414	5.0238	6.6349	7.879									
2	0.010	0.0201	0.0506	0.1025	5.9914	7.3777	9.2103	10.596									
3	0.071	0.1148	0.2158	0.3518	7.8147	9.3484	11.344	12.838									
4	0.206	0.2971	0.4844	0.7107	9.4877	11.143	13.276	14.860									
5	0.411	0.5543	0.8312	1.1454	11.070	12.832	15.086	16.749									
6	0.675	0.8720	1.2373	1.6553	12.591	14.449	16.811	18.547									
7	0.989	1.2390	1.6898	2.1673	14.067	16.012	18.475	20.277									
8	1.344	1.6465	2.1797	2.7326	15.507	17.534	20.090	21.954									
9	1.714	2.0879	2.7003	3.3251	16.918	19.022	21.665	23.589									
10	2.155	2.5582	3.2469	3.9403	18.307	20.483	23.209	25.188									
11	2.603	3.0534	3.8157	4.5748	19.675	21.920	24.724	26.756									
12	3.073	3.5705	4.4037	5.2260	21.026	23.336	26.216	28.299									
13	3.565	4.1069	5.0087	5.8918	22.362	24.735	27.688	29.819									
14	4.076	4.6604	5.6287	6.5706	23.684	26.118	29.141	31.319									
15	4.600	5.2293	6.2621	7.2609	24.995	27.488	30.577	32.801									
16	5.142	5.8122	6.9076	7.9616	26.296	28.845	31.999	34.267									
17	5.697	6.4077	7.5641	8.6717	27.587	30.191	33.408	35.718									
18	6.264	7.0149	8.2307	9.3904	28.869	31.526	34.805	37.156									
19	6.843	7.6327	8.9065	10.117	30.143	32.852	36.190	38.582									
20	7.433	8.2604	9.5907	10.850	31.410	34.169	37.566	39.996									
21	8.033	8.8972	10.282	11.591	32.670	35.478	38.932	41.401									
22	8.642	9.5424	10.982	12.338	33.924	36.780	40.289	42.795									
23	9.260	10.195	11.688	13.090	35.172	38.075	41.638	44.181									
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.979	45.558									
25	10.52	11.523	13.119	14.611	37.652	40.646	44.314	46.927									
26	11.16	12.198	13.843	15.379	38.885	41.923	45.641	48.289									
27	11.80	12.878	14.573	16.151	40.113	43.194	46.962	49.644									
28	12.46	13.564	15.307	16.927	41.337	44.460	48.278	50.993									
29	13.12	14.256	16.047	17.708	42.556	45.722	49.587	52.335									
30	13.78	14.953	16.790	18.492	43.772	46.979	50.892	53.671									

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)

صبح شنبه
۸۶/۱۲/۴

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دوره های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل
سال ۱۳۸۷

مجموعه ریاضی (ریاضی محض - ریاضی کاربردی - آموزش ریاضی)
(کد ۱۲۰۸)

نام و نام خانوادگی داوطلب:

شماره داوطلبی:

تعداد سؤال: ۱۲۰

مدت پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	توابع مختلط	۲۰	۱	۲۰
۲	جبر (۱)	۲۰	۲۱	۴۰
۳	آنالیز ریاضی (۱)	۲۰	۴۱	۶۰
۴	آنالیز ریاضی (۲)	۲۰	۶۱	۸۰
۵	آنالیز عددی (۱)	۲۰	۸۱	۱۰۰
۶	جبر خطی	۲۰	۱۰۱	۱۲۰

اسفند ماه سال ۱۳۸۶

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

۱- با فرض آنکه n عددی طبیعی است معادله $(z+i)^n = (z-i)^n$ در اعداد مختلط:

(۱) $n-1$ ریشه متمایز دارد. (۲) n ریشه دارد.

(۳) حداقل یک ریشه غیر ساده دارد. (۴) هیچ ریشه ساده ندارد.

۲- اگر $\left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| \leq \frac{1}{3}$ و $z \neq \bar{a}$ ، آنگاه

(۱) $|z| \geq \frac{1}{3}|a|$ (۲) $|z| \leq 2|a|$ (۳) $|z| \geq 2|\bar{a}|$ (۴) $|z| \leq 3|a|$

۳- جواب کلی معادله $\sin z = \cosh 4$ کدام است؟ (n یک عدد صحیح نامنفی است)

(۱) $z = (\pm 2n + \frac{1}{4})\pi \pm 2i$ (۲) $z = (\pm 2n + \frac{1}{3})\pi \pm \frac{4}{3}i$

(۳) $z = (\pm 2n + \frac{1}{4})\pi \pm 4i$ (۴) $z = (\pm 2n + \frac{1}{5})\pi \pm 3i$

۴- اگر $u(x,y) = 2x(1-y)$ و تابع v یک مزدوج همساز تابع u باشد، یعنی $f = u + iv$ تحلیلی باشد، آنگاه:

(۱) $f'(z) = -y + ix$ (۲) $f'(z) = 2iz$

(۳) $f'(z) = 2(1-y) + 2ix$ (۴) $f'(z) = 2(1-y) + 2i(x-1)$

۵- هرگاه $f(z)$ یک تابع تحلیلی باشد، آنگاه مقدار A در تساوی $A|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2$ برابر است با:

(۱) $A = 2$ (۲) $A = 1$ (۳) $A = 4$ (۴) $A = 9$

۶- اگر C دایره $|z| = \frac{1}{4}$ در جهت مثبت باشد آنگاه مقدار $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z^2+1)} dz$ برابر است با:

(۱) $-2\pi i$ (۲) $-\pi i$ (۳) 0 (۴) $2\pi i$

۷- نگاشت $w = \frac{1}{4}(z + \frac{1}{z})$ دایره $|z| = 2$ را بر کدام یک از منحنی‌های زیر می‌نگارد؟

(۱) دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$

(۲) یک بیضی که قطر آن موازی محورها نیست.

(۳) یک بیضی که قطر کوچک آن موازی محور حقیقی است.

(۴) یک بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور حقیقی است.

۸- نگاشت $f(z) = \sin z$ خطوط موازی محور x ها و خطوط موازی محور y ها را به ترتیب به کدام یک تبدیل می کند؟

- (۱) مستطیلهای گذرنده از مبدا
- (۲) دایره
- (۳) خطوط موازی محور y ها و خطوط موازی محور x ها
- (۴) بیضی و هذلولی

۹- تابع $f(z) = \sin \frac{1}{z} - \cos \frac{1}{z}$

- (۱) در $z = 0$ تکینی اساسی دارد.
- (۲) در $z = 0$ قطب دارد.
- (۳) در $z = 0$ تکینی برداشتنی دارد.
- (۴) در همسایگی سفته (محدوف) $z = 0$ کراندار است.

۱۰- مقدار انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 \sin z}$ در جهت مثلثاتی برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{\pi i}{3}$
- (۴) $2\pi i$

۱۱- انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z-a|^2}$ ، که در آن $a \in \mathbb{C}$ و $|a| < 1$ ، برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{2\pi}{1-|a|^2}$
- (۳) ۱
- (۴) $2\pi|a|$

۱۲- مقدار انتگرال مختلط $\int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}} dz$ در جهت مثلثاتی برابر است با:

- (۱) ۰
- (۲) $2\pi i$
- (۳) $2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
- (۴) $2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$

۱۳- حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi} \cos(\cos \theta + i \sin \theta) d\theta$ کدام است؟

- (۱) -2π
- (۲) -1
- (۳) 2π
- (۴) ۱

۱۴- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+z}}$ ، که در آن z یک عدد مختلط است،

- (۱) بازاء هر عدد موهومی محض z همگرا است.
- (۲) بازاء هر عدد موهومی محض z واگرا است.
- (۳) بازاء هر عدد حقیقی z همگرا است.
- (۴) بازاء هر عدد حقیقی z واگرا است.

۱۵- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} n^{n-2} \left(\frac{z}{3}\right)^n$ برابر است با:

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۰ (۴) ∞

۱۶- بسط لوران $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ در $z=1$ کدام یک از عبارات زیر است؟

$$(1) \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \dots$$

$$(2) e^2 \left\{ \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \frac{2e^2}{3} + \frac{4}{3}(z-1) + \dots \right\}$$

$$(3) \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{3e^2}{4} + 4e^2(z-1) + \dots$$

$$(4) e^2 \left\{ \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1} + \frac{4}{3}(z-1) + \dots \right\}$$

۱۷- ماکسیمم مقدار $|z^2 + 2z - 2|$ روی قرص $|z| \leq 1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{11}$ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

۱۸- تعداد ریشه‌های $z^5 + z^4 - 6z^2 + z + 1 = 0$ با احتساب مرتبه چندگانگی آنها در ناحیه $1 \leq |z| < 2$ برابر است با:

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۹- فرض کنید $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ و $w \neq 0$ یک عدد مختلط و V همسایگی صفر باشد. در این صورت معادله $f(z) = w$ به ازای هر w :

- (۱) و هر V فقط یک جواب در V دارد.
 (۲) و هر V تعداد نامتناهی در V جواب دارد.
 (۳) و هر V هیچ جوابی در V ندارد.
 (۴) یک V یافت می‌شود که در V فقط یک جواب دارد.

۲۰- اگر f یک تابع نام (*entire*) و یک به یک باشد آنگاه f' :

- (۱) ثابت است. (۲) یک به یک است.
 (۳) پوشا است. (۴) یک چند جمله‌ای غیر ثابت است.

۲۱- فرض کنید G گروهی آبدلی است. کدام یک از مجموعه‌های زیر یک زیرگروه G نیست؟

- (۱) تمام عناصر از مرتبه ۲
(۲) مجموعه‌ی تمام عناصر از مرتبه‌ی متناهی
(۳) $A = \{g^5 \mid g \in G\}$
(۴) $B = \{g \in G \mid g^5 = 1\}$

۲۲- فرض کنید R یک حلقه‌ی تقسیم است. مرکز R کدام خاصیت زیر را داراست؟

- (۱) متناهی است
(۲) مقسوم علیه صفر دارد.
(۳) میدان است
(۴) عضو وارون پذیر ناصفر ندارد.

۲۳- تعداد زیرگروه‌های از مرتبه‌ی ۲ گروه $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$ برابر است با:

- (۱) ۱
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۷

۲۴- تعداد زیرگروه‌های یک گروه دوری از مرتبه‌ی 3^5 برابر است با:

- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) ۱۵

۲۵- تعداد جایگشت‌هایی از S_7 که هیچ حرفی را ثابت نگه نمی‌دارند برابر است با:

- (۱) ۶
(۲) ۹
(۳) ۱۱
(۴) ۱۲

۲۶- تعداد عناصر مرتبه‌ی ۲۴ در گروه دوری مرتبه‌ی 12^5 چقدر است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۶
(۴) ۲۴

۲۷- زیرگروه‌های متناهی گروه ضربی اعداد مختلط C^* دارای کدام خاصیت زیر است؟

- (۱) دوری‌اند
(۲) از مرتبه‌ی ۲ می‌باشند.
(۳) تعدادشان کران دار است.
(۴) مرتبه‌شان عددی اول است.

۲۸- گروه خودریختی‌های $Z_2 \times Z_2$ و $Z_2 \times Z_2$ به ترتیب عبارتند از:

- (۱) Z_2 و Z_2
(۲) S_2 و Z_2
(۳) Z_2 و Z_2
(۴) S_2 و Z_2

۲۹- در حلقه‌ی $(Z_{20}, +, \cdot)$ چند مقسوم علیه صفر وجود دارد؟

- (۱) ۶
(۲) ۱۰
(۳) ۱۵
(۴) ۲۲

۳۰- چند همریختی یک به یک از Z_6 به $S_2 \times Z_2$ وجود دارد؟

- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۳۱ - کدامیک از عبارات زیر درست است؟

- (۱) اگر $m\mathbb{Z}$ و $n\mathbb{Z}$ ایده آل های \mathbb{Z} باشند به قسمی که m و n نسبت به هم اولند، آن گاه $m\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$
- (۲) تمام ایده آل های اول $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ماکسیمال هستند.
- (۳) $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$
- (۴) به ازای \mathbb{Z}_n یک حوزه ی ایده آل اصلی است.

۳۲ - کدامیک از گروه های زیر با تولید متناهی می باشند؟

- (۱) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_7$ (۲) $(\mathbb{Q}, +)$ (۳) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ (۴) $(\mathbb{R}, +)$

۳۳ - فرض کنیم N یک زیرگروه نرمال G باشد. کدامیک از گزینه های زیر نادرست است؟

- (۱) اگر N و $\frac{G}{N}$ با تولید متناهی باشند آن گاه G با تولید متناهی است.
- (۲) اگر N و $\frac{G}{N}$ دوری باشند آن گاه G دوری است.
- (۳) اگر $N \cap G' = 1$ آن گاه $N \subseteq Z(G)$.
- (۴) اگر $G' \subseteq N$ آن گاه $\frac{G}{N}$ آبلی است.

۳۴ - فرض کنید گروه متناهی G دارای دقیقاً یک زیرگروه ماکسیمال باشد در این صورت گزینه ی صحیح کدام است؟

- (۱) G آبلی است ولی ممکن است دوری نباشد. (۲) G دوری است.
- (۳) $[G : Z(G)] = 2$ (۴) مرتبه ی G عددی اول است.

۳۵ - گروه $\frac{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7}{\langle (2, 1) \rangle}$ با کدامیک از گروه های زیر یکرخت است؟

- (۱) گروه چهار کلاین (K_4) (۲) S_7 (۳) \mathbb{Z}_7 (۴) \mathbb{Z}_7

۳۶ - کدامیک از گروه های زیر دارای زیرگروه ماکسیمال نمی باشد؟

- (۱) \mathbb{Z}_{1287} (۲) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ (۳) $(\mathbb{R}, +)$ (۴) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

۳۷ - فرض کنید $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ یک همریختی نابديهی از گروه A به گروه جمعی \mathbb{Z} باشد. در این صورت گروه خارج قسمتی $\frac{A}{\ker f}$ دارای

کدام خاصیت زیر است؟

- (۱) دوری متناهی است (۲) دوری نامتناهی است
- (۳) آبلی متناهی است (۴) دوری با تولید نامتناهی است

۳۸ - فرض کنیم G یک گروه متناهی ساده و ناآبلی و H یک زیرگروه نابديهی G باشد. کدامیک از گزینه های زیر درست است؟

- (۱) $[G : H] = 2$ (۲) $[G : H] = 3$ (۳) $[G : H] = 4$ (۴) $[G : H] \geq 5$

۳۹- فرض کنید H زیرگروهی سره از G باشد که شامل هر زیرگروه نرمال و سره G است. اگر $x, y \in G$ و $\varphi: G \rightarrow G$ یک همریختی باشد با کدامیک از شرایط زیر h ای در H یافت می شود که: $\varphi(y) = xh$.

(۱) $\varphi(x) = \varphi^2(y)$ (۲) $\varphi(x) = \varphi(y)$ (۳) $\varphi^2(x) = \varphi(y)$ (۴) $\varphi^2(x) = \varphi^2(y)$

۴۰- در کدامیک از حلقه های زیر مجموعه ای تمام مقسوم علیه های صفر با مجموعه ای تمام عناصر وارون ناپذیر مساوی نمی باشد.

(۱) هر میدان (۲) هر حلقه ای متناهی یکدار (۳) $M_n(\mathbb{R})$ (۴) \mathbb{Z}

۴۱ - کدام گزاره در مورد مجموعه کانتور F صحیح است؟

- (۱) F در \mathbb{R} باز است.
 (۲) در F می توان یک مجموعه باز ناتهی یافت.
 (۳) F دارای هیچ نقطه درونی نیست.
 (۴) عضوی از F وجود دارد که نقطه کرانه ای F نیست.

۴۲ - کدام گزاره درست است؟

- (۱) یک عدد اصم به توان عددی اصم، ممکن است عددی گویا باشد.
 (۲) $\{ \frac{1}{x} : 0 < x < 1 \}$ مجموعه ای کراندار است.
 (۳) $\{ \frac{1}{x} : 0 < x < 1 \}$ دارای اینفیموم نیست.
 (۴) اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ کراندار باشد $\inf A = \sup(-A)$

۴۳ - اگر $A = \left\{ \frac{m+n}{2m+n+1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ در این صورت \bar{A} بستار (یا بست) A (منظور کوچکترین مجموعه رشته شامل A) در \mathbb{R} عبارتست از:

- (۱) $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$
 (۲) $\left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 (۳) $\left\{ \frac{m}{m+1} : m \in \mathbb{N} \right\}$
 (۴) $\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \cup \left\{ \frac{m}{2m+1} : m \in \mathbb{N} \right\}$

۴۴ - فرض کنیم (X, d) یک فضای متری و A و B در زیر مجموعه چگال X باشند. در این صورت: (B° مجموعه درون B است)

- (۱) اگر A باز باشد. آنگاه $A \cap B$ در X چگال است.
 (۲) $A \cap B = \emptyset$ اگر A در X بسته باشد.
 (۳) $(A - B) \cup (B - A)$ در X چگال است.
 (۴) $A^\circ \cup B^\circ$ در X چگال است.

۴۵ - فرض کنید $a_n > 0$ و $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ در این صورت:

- (۱) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
 (۲) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$
 (۳) به ازای هر p ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^p a_n$ همگراست.
 (۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^p a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $0 < p \leq 1$

۴۶ - اگر $a_n = 2^{n-1}(-1)^n$ آنگاه $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۳/۵
 (۳) ۷/۵
 (۴) ۸

۴۷ - اگر $S_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+1} S_n$ ، $S_1 = 1$ دنباله $\{S_n\}$ واجد کدام خاصیت است؟

- (۱) نزولی همگرا به صفر
 (۲) صعودی همگرا به یک
 (۳) نه صعودی است نه نزولی
 (۴) دارای حد نیست.

۴۸- فرض کنید $a_1, b_1 > 0$ و به ازای هر n ، $\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right)$ ، $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ در این صورت:

(۱) دنباله $\{a_n\}$ صعودی و دنباله $\{b_n\}$ نزول است و هر دو همگرا به $\sqrt{a_1 b_1}$ هستند.

(۲) دنباله $\{a_n\}$ نزولی و دنباله $\{b_n\}$ صعودی است و هر دو همگرا به $\sqrt{a_1 b_1}$ هستند.

(۳) دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ یکنوا نیستند ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

(۴) دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ یکنوا نیستند ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a_1 b_1$

۴۹- فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک و $N_r(\circ) = \{x \in X : d(x, \circ) < r\}$ و $A = \{x \in X : d(x, \circ) \leq r\}$. در این صورت کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۱) $\overline{N_r(\circ)} = A$ (۲) $\overline{N_r(\circ)} \subseteq A$ (۳) $A \subseteq \overline{N_r(\circ)}$ (۴) $\overline{A} \subseteq \overline{N_r(\circ)}$

۵۰- اگر $X = (-1, 2] \cup \{3\}$ زیر فضای متریک $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ باشد آنگاه کدام یک از مجموعه‌های زیر در X بسته است؟

(۱) $\{-1\}$ (۲) $(-1, 0]$ (۳) $[0, 2)$ (۴) $(-1, 2)$

۵۱- کدام گزاره نادرست است؟

(۱) $\left\{ \frac{1}{x+1} + \sin x : x \in \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \right\}$ فشرده است.

(۲) اگر (X, d) یک فضای متریک و $A, B \subseteq X$ که A باز است و $A \cap B = \emptyset$ آنگاه $A \cap \overline{B} = \emptyset$

(۳) اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ و A و B همبند و $A \cap B \neq \emptyset$ آنگاه $A \cup B$ همبند است

(۴) هرگاه $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ و ∂A نشان دهنده مرز A باشد، آنگاه $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

۵۲- فرض کنید d_T و d_E به ترتیب مترهای بدیهی و اقلیدسی روی \mathbb{R} باشند در این صورت:

(۱) تابع همانی از (\mathbb{R}, d_T) به (\mathbb{R}, d_E) پیوسته است.

(۲) تابع همانی از (\mathbb{R}, d_E) به (\mathbb{R}, d_T) پیوسته است.

(۳) تابع همانی و عکس آن از (\mathbb{R}, d_T) به (\mathbb{R}, d_E) پیوسته است.

(۴) هیچ‌یک از توابع همانی و معکوس آن از (\mathbb{R}, d_T) به (\mathbb{R}, d_E) پیوسته نمی‌باشند.

۵۳- گوئیم تابع $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ باز (بسته) است هرگاه به ازای هر زیر مجموعه باز (بسته) مانند A از X مجموعه $f(A)$ زیر مجموعه‌ای باز (بسته) از Y باشد کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر f باز باشد آنگاه بسته است ولی عکس این مطلب همواره لزوماً درست نیست.

(۲) اگر f بسته باشد آنگاه باز است ولی عکس این مطلب همواره لزوماً برقرار نیست.

(۳) f باز است فقط و فقط وقتی که بسته باشد.

(۴) باز و بسته بودن f ربطی به هم ندارد.

۵۴- فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. در این صورت متریک معادل d مانند d_1 روی X وجود دارد به قسمی که (X, d_1) :

(۱) تام است. (۲) فشرده است. (۳) کراندار است. (۴) همبند است.

۵۵- فرض کنیم X مجموعه‌ای نامتناهی باشد در این صورت متری مانند d روی X وجود دارد به قسمی که (X, d) :

- (۱) همبند و کراندار است. (۲) همبند و غیر کراندار است. (۳) فشرده و غیر کراندار است. (۴) نافشرده و کراندار است.

۵۶- کدام گزینه نادرست است؟ در یک فضای متری فشرده،

- (۱) هر دنباله کوشی دارای زیر دنباله‌ای همگراست.
 (۲) می‌توان دنباله‌ای یافت که تمام زیر دنباله‌های آن واگرا باشد.
 (۳) هر خانواده از مجموعه‌های بسته که دارای خاصیت اشتراک متناهی است دارای اشتراک غیر تهی است.
 (۴) هر مجموعه نامتناهی دارای نقطه‌ای حدی است.

۵۷- فرض کنیم $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n و $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} P(x) & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ باشد. در این صورت تعداد نقاط پیوستگی تابع f کدام است؟

- (۱) به تعداد ریشه‌های اصم معادله $P(x) = 0$
 (۲) به تعداد ریشه‌های معادله $P(x) = 0$
 (۳) به تعداد ریشه‌های گویای معادله $P(x) = 0$
 (۴) یک نقطه یعنی f فقط در صفر پیوسته است.

۵۸- فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $[a, \infty)$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر f' بر $[a, \infty)$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد، آنگاه f بر $[a, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است.
 (۲) اگر f' بر هر بازه به صورت $[a, b]$ کراندار باشد، آنگاه f بر $[a, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است.
 (۳) اگر f' بر $[a, \infty)$ پیوسته و یکنوا باشد، آنگاه f بر $[a, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است.
 (۴) اگر f' بر $[a, \infty)$ نزولی و $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ ، آنگاه f بر $[a, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

۵۹- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در این صورت:

- (۱) f بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته یکنواخت است.
 (۲) حد f تنها در نقطه صفر موجود نیست.
 (۳) f تنها بر زیر بازه‌های فشرده \mathbb{R} پیوسته یکنواخت است.
 (۴) f بر $[0, \infty)$ پیوسته است ولی نه به طور یکنواخت.

۶۰- کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) تابعی وجود دارد که فقط در دو نقطه پیوسته و در همان دو نقطه هم مشتق‌پذیر است.
 (۲) تابعی وجود دارد که فقط در یک نقطه پیوسته و در همان نقطه هم مشتق‌پذیر است.
 (۳) اگر به ازای $x, y \in \mathbb{R}$ ، $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ آنگاه f مشتق‌پذیر است.
 (۴) تابع غیر صفر وجود دارد که $f(0) = 0$ و همه مشتقات آن در $x = 0$ مساوی صفر است.

۶۱- اگر $f \in R(f)$ (یعنی f نسبت به خودش انتگرال پذیر ریمان - اشتیل - سی باشد) و $f(b) - f(a) = 1$ مقدار $\int_a^b f df$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1+f(a)}{2}$ (۳) $\frac{f(b)-1}{2}$ (۴) $\frac{f(a)+f(b)}{2}$

۶۲- فرض کنید f و g دو تابع بر $[a, b]$ باشند، در این صورت:

- (۱) ممکن است که f و $f \cdot g$ هر دو بر $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند ولی g انتگرال ناپذیر باشد.
 (۲) $f \cdot g$ تنها موقعی انتگرال پذیر است که دو تابع f و g انتگرال پذیر باشند.
 (۳) g تنها موقعی انتگرال پذیر است که f و $f \cdot g$ هر دو انتگرال پذیر باشند و g بر این بازه کران دار باشد.
 (۴) اگر $f(x) \geq 1$ برای هر $x \in [a, b]$ ، آنگاه $\frac{f}{g}$ برای هر تابع کران دار g انتگرال پذیر است.

۶۳- دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n(1-x)$ را بر $[0, 1]$ در نظر بگیرید. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ همگرایی نقطه به نقطه است ولی به طور یکنواخت همگرا نمی‌باشد اما $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n(1-x)$ همگرایی یکنواخت است.
 (۲) هر دو سری همگرایی یکنواخت هستند.
 (۳) هر دو سری نقطه به نقطه همگرایی ولی این همگرایی یکنواخت نیست.
 (۴) هیچ یک از سری‌ها حتی نقطه به نقطه همگرا نیستند.

۶۴- دنباله $\{n^2 x e^{-n^2 x^2}\}$ را در بازه $[0, 1]$ در نظر بگیرید، کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- (۱) به طور یکنواخت کران دار است ولی همگرا نیست (حتی به صورت نقطه وار)
 (۲) نقطه به نقطه کران دار نیست و همپیوسته است.
 (۳) نقطه به نقطه کران دار و همپیوسته است.
 (۴) نقطه به نقطه کران دار است ولی همپیوسته نیست.

۶۵- فرض کنیم A مجموعه همه چند جمله‌ای‌ها بدون مقدار ثابت باشد که دارای ضرایب حقیقی هستند. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- (۱) A نه در $C([0, 1])$ چگال است و نه در $C([1, 2])$.
 (۲) A در $C([1, 2])$ چگال نیست ولی در $C([0, 1])$ چگال است.
 (۳) A در $C([1, 2])$ چگال است ولی در $C([0, 1])$ چگال نیست.
 (۴) A در $C([0, 2])$ چگال است.

۶۶- فرض کنیم f بر $[a, b]$ با تغییر کران دار باشد و $g(x) = V(f; a, x)$ (تغییر f از a تا x). در این صورت:

- (۱) اگر f بر $[a, b]$ پیوسته و نانزولی باشد، آنگاه g^{-1} موجود است.
- (۲) اگر g بر $[0, g(b)]$ نانزولی و پیوسته باشد، آنگاه f نیز چنین است.
- (۳) اگر g بر $[0, g(b)]$ نانزولی باشد، آنگاه g^{-1} پیوسته است.
- (۴) اگر f بر هیچ زیر بازه از $[a, b]$ ثابت نباشد، آنگاه g^{-1} موجود است.

۶۷- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) ۱ (۳) π (۴) $+\infty$

۶۸- فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[0, 1]$ باشد و $n \in \mathbb{N}$ و $0 \leq x \leq 1$ و $\alpha_n(x) = [nx]$ (جزء صحیح) در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 f d\alpha_n$ کدام است؟

- (۱) $f(1) - f(0)$ (۲) $\int_0^1 f(x) dx$ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ (۴) حد فوق موجود نمی باشد.

۶۹- فرض کنیم $\alpha > 0$ و $x \in \mathbb{R}$ و $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$ در این صورت:

- (۱) سری فوق در بازه $(0, \infty)$ به طور یکنواخت همگراست.
- (۲) اگر $\alpha > \frac{1}{4}$ آنگاه سری فوق در \mathbb{R} به طور یکنواخت همگراست.
- (۳) سری فوق فقط در بازه های کراندار به طور یکنواخت همگراست.
- (۴) اگر $\alpha \geq \frac{1}{4}$ آنگاه سری فوق در \mathbb{R} به طور یکنواخت همگراست.

۷۰- اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای بازه همگرایی $E = (-r, r)$ باشد در این صورت f بر $[-r, r]$ پیوسته است اگر و تنها اگر:

(۱) $0 < r < 1$ (۲) $\{-r, r\} \subseteq D_f$ (۳) $D_f \subseteq E$ (۴) $R_f = \bar{E}$

۷۱- اگر $f(x) = \begin{cases} x \cos(\frac{\pi}{2x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ آنگاه f بر $[0, 1]$:

- (۱) پیوسته است ولی با تغییر کراندار نیست.
- (۲) پیوسته است و با تغییر کراندار نیز می باشد.
- (۳) نه پیوسته و نه با تغییر کراندار است.
- (۴) پیوسته نیست ولی با تغییر کراندار است.

۷۲- فرض کنید $f_n(x) = n \sqrt{x} \sin \frac{x}{n}$ در این صورت:

- (۱) $\{f_n\}$ بر هیچ بازه ای به طور یکنواخت همگرا نیست.
- (۲) دنباله $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ فقط نقطه به نقطه همگراست.
- (۳) دنباله $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگراست.
- (۴) همگرایی یکنواخت نیست ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$

۷۳- فرض کنید $I = [0, 1] \times [0, 1]$ و f تابعی حقیقی بر I باشد به طوری که

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 2y & \text{اگر } x \text{ گویا نباشد} \end{cases}$$

مقدار عبارت $|\int_0^1 f(x, y) dx - \int_0^1 f(x, y) dy|$ برابر است با:

- (۱) صفر (۲) $|1 - 2y|$ (۳) $|1 + 2y|$ (۴) $2y$

۷۴- تابع پیوسته $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ مفروض است. همگرایی کدام یک از دنباله‌های توابع زیر بر $[0, 1]$ یکنواخت نیست؟

(۱) $f_n(x) = \sin(\frac{1}{n}f(x))$ (۲) $f_n(x) = e^{\frac{1}{n}f(x)}$ (۳) $f_n(x) = (nf(x))^{\frac{1}{n}}$ (۴) $f_n(x) = f(\frac{1}{n}x)$

۷۵- فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. در این صورت f بر $[a, b]$:

- (۱) انتگرال پذیر ریمان است اگر بر این بازه با تغییر کران دار باشد.
 (۲) با تغییر کران دار است اگر بر این بازه انتگرال پذیر ریمان باشد.
 (۳) یکنواست اگر بر این بازه با تغییر کران دار باشد.
 (۴) مشتق کران دار دارد اگر بر این بازه با تغییر کران دار باشد.

۷۶- فرض کنید $f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2^n}$ و $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$ آنگاه:

- (۱) $f \notin R[0, 1]$ (۲) f تابعی پیوسته و لذا $f \in R[0, 1]$
 (۳) نقاط ناپیوستگی f متناهی و لذا $f \in R[0, 1]$ (۴) نقاط ناپیوستگی f شمارا و لذا $f \in R[0, 1]$

۷۷- فرض کنید f بر $[a, b]$ کراندار باشد و تعداد نقاط ناپیوستگی f بر $[a, b]$ متناهی باشد. فرض کنید α بر $[a, b]$ صعودی بوده و $\mathbb{R}(\alpha)$ مجموعه تمام

توابع انتگرال پذیر ریمان - اشتیلتیس نسبت به α باشد.

(۱) $f \in \mathbb{R}(\alpha)$

(۲) $f \notin \mathbb{R}(\alpha)$

(۳) اگر α در هر نقطه ناپیوستگی f ؛ پیوسته باشد، آنگاه $f \in \mathbb{R}(\alpha)$

(۴) اگر α تنها در تعدادی متناهی از نقاط $[a, b]$ ناپیوسته باشد، آنگاه $f \in \mathbb{R}(\alpha)$

۷۸- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله به طور یکنواخت کراندار از توابع باشد که بر $[a, b]$ ریمان انتگرال پذیر هستند، و قرار می‌دهیم

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

(۱) هر زیر دنباله از $\{F_n\}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگراست.

(۲) هر زیر دنباله از $\{F_n\}$ بر $[a, b]$ همگرایی نقطه‌ای است، اما دارای هیچ زیر دنباله همگرایی یکنواخت نیست.

(۳) زیر دنباله‌ای مانند $\{F_{n_k}\}$ هست که بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگراست.

(۴) دارای هیچ زیر دنباله همگرایی نقطه‌ای نیست.

۷۹- شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} n^{(n-1)!} (\frac{x+x_0}{3})^{n!}$ برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) $+\infty$

۸۰- اگر f بر $[0, 1]$ تعریف، f^p و f^q بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر بوده و $p < q$ ، آنگاه:

$$\int_a^b |f|^p dx \leq \left(\int_a^b |f|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \quad (۲)$$

$$\int_a^b |f|^q dx \leq \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \quad (۱)$$

$$\int_a^b |f|^p dx \leq \left(\int_a^b |f|^q dx \right)^{\frac{q}{p}} \quad (۴)$$

$$\int_a^b |f|^q dx \leq \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \quad (۳)$$

۸۱- عدد $A = (1/0.1011)_2$ در مبنای ۱۰ کدام است؟

$$\frac{3}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{14} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{15} \quad (۳)$$

۸۲- اگر a و b به ترتیب تقریب‌هایی از A و B باشند و $e(a) = |A - a|$ و $e(b) = |B - b|$ در چه صورت داریم: (a, b, A, B) مثبت هستند.

$$e(ab) = |AB - ab| = ae(b) + be(a)?$$

$$A = a, (B - b) > 0 \quad (۲)$$

$$(A - a)(B - b) > 0 \quad (۱)$$

$$A = a \text{ یا } B = b \quad (۴)$$

$$B = b, (A - a) > 0 \quad (۳)$$

۸۳- محاسبه I_n از رابطه بازگشتی $I_n = \frac{1}{a}I_{n-1} + bI_{n-2}$ با فرض داشتن مقادیر تقریبی I_1 و I_2 به ازای کدام مقادیر a و b پایدار است؟

$$|b| < 1, |a| > 1 \quad (۲)$$

$$a > 1, b < 1 \quad (۱)$$

$$|a| \geq 1, |b| \geq 1 \quad (۴)$$

$$|a| \leq 1, |b| \leq 1 \quad (۳)$$

۸۴- معادله $\log_e x = x^2 - 1$ دارای دو ریشه حقیقی $\alpha_1 \approx 0.45$ و $\alpha_2 = 1$ است. به ازای کدام مقدار اولیه x_0 دنباله حاصل از فرمول تکراری

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + \log_e x_n}$$

$$x_0 < \alpha_1 \quad (۲)$$

$$x_0 < \alpha_2 \quad (۱)$$

$$\alpha_1 < x_0 < \alpha_2 \quad (۴)$$

$$x_0 > \alpha_2 \quad (۳)$$

۸۵- معادله $f(x) = 2x - (1-x)^2 = 0$ ریشه‌های در $[0, 1]$ دارد. تکرار دوم روش نایجایی کدام است؟

$$\frac{7}{27} \quad (۲)$$

$$\frac{13}{27} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{17} \quad (۱)$$

$$\frac{9}{27} \quad (۳)$$

۸۶- برای تعیین ریشه مثبت معادله $2x^2 - 2x^2 + 1 = 0$ از روش نیوتن استفاده می‌کنیم. اگر این روش همگرا باشد مرتبه همگرایی آن کدام است؟

$$\text{حداقل یک} \quad (۲)$$

$$\text{یک} \quad (۱)$$

$$\text{حداقل دو} \quad (۴)$$

$$\text{دو} \quad (۳)$$

۸۷- دنباله $\{x_n\}$ از $x_{n+1} = g(x_n)$ به دست آمده و همگراست. ضمناً، $\alpha = g(\alpha)$ و در یک همسایگی از α ، $L < |g'(x)| \leq 1$. سرعت همگرایی

$\{x_n\}$ به α به کدام عامل بستگی دارد؟

$$g(\alpha) \quad (۲)$$

$$L \quad (۱)$$

$$|g'(\alpha)| \quad (۴)$$

$$g'(x) \quad (۳)$$

۸۸ - حداقل و حداکثر تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $x^{100} - ax + b = 0$ ، که در آن $a^2 + b^2 \neq 0$ کدام است؟

- (۱) ۰ و ۲
(۲) ۰ و ۱۰۰
(۳) ۱ و ۱۰۰
(۴) ۲ و ۱۰۰

۸۹ - چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر از درجه چند است؟

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۱۰	-۳	-۲	-۱	۶	۲۵

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۹۰ - تابع جدولی زیر داده شده است:

x_i	-۱	۱	۲
f_i	۱	۲	۴

تقریبی از ریشه $f(x) = 0$ به روش درونیابی معکوس کدام است؟

- (۱) ۰
(۲) -۴
(۳) ۲
(۴) ۴

۹۱ - اگر $f(x) = u(x)v(x)$ مقدار $f[x_0, x_1]$ کدام است؟

- (۱) $f[x_0, x_1] = v[x_0]u[x_0, x_1] + u[x_1]v[x_0, x_1]$
(۲) $f[x_0, x_1] = u[x_0]u[x_0, x_1] + v[x_1]v[x_0, x_1]$
(۳) $f[x_0, x_1] = u[x_0]v[x_0, x_1] + u[x_0, x_1]v[x_1]$
(۴) $f[x_0, x_1] = v[x_0]v[x_0, x_1] + u[x_1]u[x_0, x_1]$

۹۲ - فرض کنید $n \geq 2$ و (X_i, Y_i) ، $i = 1, \dots, n$ نقاط داده متمایز، و چند جمله‌ای‌های $P_1(X)$ و $P_r(X)$ از درجه حداکثر $n-2$ به ترتیب نقاط

X_1, \dots, X_{n-1} و X_2, \dots, X_n را درونیابی کنند. گزینه درست را برای T_1 و T_r در تعریف $P(X)$ انتخاب کنید تا $P(X)$ چند جمله‌ای درونیاب در

$$P(X) = \frac{T_1 P_1(X) - T_r P_r(X)}{X_1 - X_n} \text{ باشد: } X_1, \dots, X_n \text{ نقاط}$$

- (۱) $T_r = (X - X_n), T_1 = (X - X_1)$
(۲) $T_r = (X_n - X_1), T_1 = (X_1 - X_n)$
(۳) $T_r = (X_1 - X_n), T_1 = (X_n - X_1)$
(۴) $T_r = (X - X_1), T_1 = (X - X_n)$

۹۳ - تقریب تابع $\cos X$ در بازه $[0, 1]$ به وسیله قطعه‌های خطی درونیاب مدنظر است. بازه $[0, 1]$ به چند قطعه مساوی تقسیم شود تا کران بالای

خطای درونیابی برای تخمین $\cos X$ در سرتاسر بازه $[0, 1]$ بیشتر از 0.00125 نباشد؟

- (۱) ۲
(۲) ۵
(۳) ۱۰
(۴) ۱۰۰

۹۴ - خط $y = \alpha x + \beta$ که به ازای آن $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - (\alpha x + \beta)]^2 dx$ کمترین مقدار را دارد کدام است؟

(۲) $y = \pi x$

(۱) $y = x$

(۴) $y = \frac{24}{\pi^2} x$

(۳) $y = \frac{12}{\pi^2} x$

۹۵ - می‌دانیم که $f''_i - \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} = O(h^P)$ مقدار P کدام است؟ (فرض کنید $x_{i+1} - x_i = h$ و $f(x_i) = f_i$)

(۲) دو

(۱) یک

(۴) چهار

(۳) سه

۹۶ - تقریبی از انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ به قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب مساوی $2/75$ و به قاعده‌ی نقطه میانی مرکب مساوی $3/2$ به دست آمده است.

کدام عدد تقریب بهتری برای این انتگرال است؟ (برای هر دو قاعده یکسان است.)

(۲) $2/95$

(۱) $2/9$

(۴) $3/05$

(۳) $2/975$

۹۷ - قاعده انتگرالگیری تقریبی زیر داده شده و برای چند جمله‌ای‌های با حداکثر درجه دقیق است: $\int_0^1 f(x) dx \approx \alpha f(0) + \beta f(x_1)$ مقادیر α ، β و x_1 کدامند؟

(۲) $\alpha = \beta = \frac{1}{3}, x_1 = \frac{1}{3}$

(۱) $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{3}, x_1 = \frac{1}{3}$

(۴) $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 1, x_1 = \frac{2}{3}$

(۳) $\alpha = \beta = 1, x_1 = \frac{2}{3}$

۹۸ - در فرمول انتگرالگیری $\int_0^1 f(x) dx \approx c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$ مقادیر c_0 ، c_1 و x_1 چقدر باشند تا فرمول مذکور برای چند جمله‌ای‌های با حداکثر درجه دقیق باشد؟

(۲) $x_1 = \frac{2}{3}, c_1 = \frac{2}{3}, c_0 = \frac{1}{3}$

(۱) $x_1 = \frac{1}{3}, c_1 = 1, c_0 = 0$

(۴) $x_1 = \frac{1}{3}, c_1 = \frac{1}{3}, c_0 = \frac{2}{3}$

(۳) $x_1 = 1, c_1 = \frac{1}{3}, c_0 = \frac{1}{3}$

۹۹ - فرض کنید $I = \int_a^b f(x) dx$ و $R(h)$ تقریبی از I از مرتبه $O(h^r)$ باشد که در رابطه $I = R(h) + \alpha_1 h^r + \alpha_2 h^{r+1} + \alpha_3 h^{r+2} + \dots$ صدق می‌کند که

در آن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ مقادیر ثابتی مستقل از h هستند. آنگاه کدام یک از تقریب‌های زیر از مرتبه $O(h^r)$ خواهد بود؟

(۲) $W(h) = \frac{2^r R(\frac{h}{2}) - R(h)}{2^r - 1}$

(۱) $W(h) = \frac{2^r R(\frac{h}{2}) - R(h)}{2^r - 1}$

(۴) $W(h) = \frac{3^r R(\frac{h}{3}) - R(h)}{3^r - 1}$

(۳) $W(h) = \frac{3^r R(\frac{h}{3}) - R(h)}{3^r - 1}$

۱۰۰- برای تعیین تقریبی از جواب مسأله مقدار اولیه $\begin{cases} y' = f(x) \\ y(a) = 0 \end{cases}$ روی بازه $[a, b]$ که $h = \frac{b-a}{n}$ و $t_k = a + kh$ برای $k = 0, 1, \dots, n$ از روش اویلر استفاده شده است. مقدار تقریبی $y(b)$ کدام است؟

$$\sum_{k=0}^n f(t_k h) \quad (۲)$$

$$h \sum_{k=0}^n f(t_k) \quad (۴)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k h) \quad (۱)$$

$$h \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \quad (۳)$$

۱۰۱- فرض کنید $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^6$ با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$T(a, b, c, d, e) = (a + b + c, 2a + 2b, a - 2b, 0, c - d, 2c + d)$$

در این صورت رتبه T کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰۲- فرض کنید $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ یک ماتریس روی میدان اعداد مختلط \mathbb{C} باشد، در این صورت مقادیر ویژه A عبارتند از:

- (۱) ۰، -۱ (۲) ۱، ۰ (۳) ۱، -۱، ۰ (۴) ۲، ۱، -۱

۱۰۳- ماتریس تبدیل خطی $T(x, y) = (2x, x - y)$ از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 نسبت به پایه $B = \{(3, 0), (0, -2)\}$ کدام

است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$

۱۰۴- اگر ۳ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد آنگاه یک مقدار ویژه ماتریس $A^2 - A^2 - 7I$ عبارتست از:

- (۱) -۱۱ (۲) ۱۱ (۳) ۱۸ (۴) ۲۷

۱۰۵- چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A مساوی $x^2 - x^2 + x - 2$ است در این صورت چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A^{-1} برابر است با:

(۱) $\frac{1}{2}(2x^2 - x^2 + x - 1)$ (۲) $x^2 - 2x^2 + x - 2$
 (۳) $\frac{1}{2}(2x^2 - x^2 + x + 1)$ (۴) $x^2 - x^2 + 2x - 1$

۱۰۶- فضای برداری چند جمله‌ایها با ضرایب حقیقی و درجه حداکثر یک را با V نمایش می‌دهیم.

$B_1 = \{2 - 3x, x - 1\}$ و $B_2 = \{1, x\}$ پایه‌های مرتبی برای V فرض می‌شوند. ماتریس تعویض پایه از

B_2 به B_1 کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۱۰۷- تعداد ماتریسهای 3×3 روی \mathbb{Z}_7 با شرط $A^t = -A$ برابر است با:

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۱۰۸- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد تمام ماتریس‌هایی که در شرط $A^2 + A^2 + A + I = 0$ صدق می‌کنند نادرست است؟

- (۱) بر روی میدان اعداد مختلط قطری شوند. (۲) وارون پذیر هستند.
 (۳) بر روی میدان اعداد حقیقی مثلثی شوند. (۴) حداکثر سه مقدار ویژه متمایز دارد.

۱۰۹- فرض کنید $A \in M_V(\mathbb{R})$ ماتریسی باشد به طوری که $A^7 = 0$ در این صورت $tr(I + A + A^2 + \dots + A^6)$ کدام است؟

- (۱) -7 (۲) 0 (۳) 7 (۴) 42

۱۱۰- فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ روی میدان اعداد حقیقی \mathbb{R} باشد که در آن $1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = 1$.

اگر $V = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = 0\}$ یک فضای برداری باشد، آنگاه بعد V عبارت است از:

- (۱) $n^2 - 1$ (۲) $n^2 - n$ (۳) $\frac{1}{2}n(n-1)$ (۴) $\frac{1}{2}n(n+1)$

۱۱۱- کدامیک از مجموعه‌های زیر تشکیل یک فضای برداری می‌دهند؟

- (۱) تمام ماتریس‌هایی که در $M_n(\mathbb{R})$ هستند و پوچی آنها حداکثر یک است (روی میدان \mathbb{R})
 (۲) تمام ماتریسهایی که در $M_n(\mathbb{R})$ هستند و رتبه آنها حداکثر یک است (روی میدان \mathbb{R})
 (۳) تمام ماتریسهایی در $M_n(\mathbb{R})$ که اثر آنها عددی گویا است (روی میدان \mathbb{R})
 (۴) تمام ماتریسهایی در $M_n(\mathbb{R})$ که اثر آنها صفر است (روی میدان \mathbb{R})

۱۱۲- یک پایه برای فضای برداری پدید آمده توسط بردارهای سطری ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ عبارتست از:

- (۱) $\{(0, 3, 0, -1), (0, 0, 3, -1)\}$ (۲) $\{(1, 3, 0, -1), (0, 0, 3, -1)\}$
 (۳) $\{(0, 3, -3, 1), (0, 2, 1, 1)\}$ (۴) $\{(0, 6, 12, 6), (0, 2, -1, 1)\}$

۱۱۳- فرض کنید A یک ماتریس حقیقی 5×8 است و دستگاه همگن $AX = 0$ را در نظر می‌گیریم که X یک بردار ستونی است. حداقل بُعد فضای جواب این دستگاه عبارتست از:

- (۱) 1 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۱۱۴- فرض کنید F یک میدان باشد و W زیر فضایی از $M_n(F)$ باشد به طوری که هر ماتریس در W پوچتوان باشد در این صورت حداکثر بعد W برابر است با:

- (۱) n (۲) $\binom{n}{2}$ (۳) $\binom{n+1}{2}$ (۴) $\binom{n}{2} + 1$

- ۱۱۵- T یک تبدیل خطی فضای برداری V در شرط $\ker(T + T^2) - \ker T \neq \emptyset$ صدق می کند. در این صورت تبدیل خطی $T + I$ دارای کدام خاصیت زیر است؟
- (۱) پوچتوان است. (۲) پوشا است. (۳) وارون پذیر نیست. (۴) یک به یک است.

- ۱۱۶- فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) $\text{Im}T \cap \ker T \neq \{0\}$
 (۲) عدد طبیعی i وجود دارد به طوری که $\text{Im}T^i = \text{Im}T^{i+1}$
 (۳) عدد طبیعی i وجود دارد به طوری که $\ker T^i = \ker T^{i+1}$
 (۴) برای هر عدد طبیعی i ، $n \geq (\text{پوچی } T^{i+1}) + (\text{رتبه } T^i)$

- ۱۱۷- فرض کنید A ماتریسی وارون پذیر با درآیه های صحیح باشد و تمام درآیه های A^{-1} نیز صحیح باشند در این صورت داریم:

- (۱) $\det A = -1$ (۲) $\det A = 1$ (۳) $|\det A| > 1$ (۴) $|\det A| = 1$

- ۱۱۸- فرض کنید F یک میدان باشد و $A, B \in M_n(F)$ در این صورت گزینه صحیح کدام است؟

- (۱) $\text{adj}(2A) = 2^n \text{adj} A$
 (۲) $\text{adj}(A+B) = \text{adj}(A) + \text{adj}(B)$
 (۳) $\text{adj}(AB) = \text{adj} A \text{adj} B$
 (۴) $\text{adj}(AB) = \text{adj} B \text{adj} A$

- ۱۱۹- فرض کنید F یک میدان باشد و $A \in M_n(F)$ و $\text{rank} A = r$ در این صورت کدام گزینه زیر صحیح است؟

- (۱) دو ماتریس وارون پذیر P و Q وجود دارند به طوری که $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- (۲) A با ماتریس $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ متشابه است.

- (۳) $\text{rank}(A^T) = r$

- (۴) $\text{rank}(A^T) < r$

- ۱۲۰- فرض کنید F یک میدان باشد و $A \in M_n(F)$. فرض کنید r عددی طبیعی باشد که $1 \leq r < n$. اگر r تا

از درآیه های A را به دلخواه تغییر دهیم در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) رتبه ماتریس تغییر نمی کند.
 (۲) پوچی دقیقاً r تا تغییر می کند.
 (۳) پوچی حداکثر r تا تغییر می کند.
 (۴) پوچی حداقل r تا تغییر می کند.