



نام نام خانوادگی محل امضاء

صبح چهارشنبه

۸۸/۱۱/۲۸

دقت رجه $\frac{2}{3}$



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)

آزمون ورودی دوره های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۸۹

مجموعه آمار - کد ۱۲۰۷

مدت پاسخگویی: ۱۹۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۹۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	آمار کاربردی (روش های آماری - رگرسیون - نمونه گیری)	۴۵	۷۱	۱۱۵
۲	آمار نظری (احتمال و کاربرد آن - آمار ریاضی ۱ و ۲)	۴۵	۱۱۶	۱۶۰

بهمن ماه سال ۱۳۸۸

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

۷۱- متغیرهای تصادفی X و Y را در نظر بگیرید. چنانچه $aX + bY = c$ باشد (a و b مخالف صفر)، ضریب همبستگی X و Y

کدام است؟ $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$$-\frac{b}{a} \quad (۱)$$

$$\frac{b}{a} \quad (۲)$$

$$-\frac{\text{sgn}(b)}{\text{sgn}(a)} \quad (۳)$$

$$\frac{\text{sgn}(b)}{\text{sgn}(a)} \quad (۴)$$

۷۲- اگر X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، کارایی نسبی برآورد کننده نااریب

$$\frac{X_1 - 2X_2 + 3X_3}{2}$$

نسبت به \bar{X} کدام است؟

$$\frac{2}{21} \quad (۱)$$

$$\frac{8}{21} \quad (۲)$$

$$\frac{21}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{21}{2} \quad (۴)$$

۷۳- فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد. برای آزمون $H_0: \theta = \frac{1}{3}$ در مقابل $H_1: \theta = \frac{2}{3}$ اگر ناحیه بحرانی به صورت

$X \in \{2, 3\}$ باشد، احتمال خطای نوع اول (α) و دوم (β) آزمون کدام است؟

x	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1-\theta}{3}$	$\frac{\theta}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$\alpha = \frac{7}{9}, \beta = \frac{2}{9} \quad (۱)$$

$$\alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{1}{9} \quad (۲)$$

$$\alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{2}{9} \quad (۳)$$

$$\alpha = \frac{7}{9}, \beta = \frac{1}{9} \quad (۴)$$

۷۴- فرض کنید $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ یک نمونه تصادفی از توزیع دو متغیره با میانگین‌های صفر، واریانس‌های یک و

ضریب همبستگی ρ باشند. فرض $H_0: \rho = 0$ را در برابر $H_1: \rho > 0$ در صورتی رد می‌کنیم که $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i$

مثبت باشد. احتمال خطای نوع اول برای اندازه نمونه بزرگ به صورت تقریبی کدام است؟

(۱) ۰/۰۵

(۲) ۰/۱

(۳) ۰/۲۵

(۴) ۰/۵

۷۵- برای برآورد پارامتر θ ، دو برآورد کننده مستقل و نااریب T_1 و T_2 بر اساس دو نمونه تصادفی n_1 تایی و n_2 تایی معرفی شده‌اند. اگر واریانس T_1 چهار برابر واریانس T_2 باشد و $T = \lambda T_1 + (1 - \lambda) T_2$ ، به ازای کدام مقدار λ ، T دارای کمترین واریانس است؟

(۱) $\frac{1}{5}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۴) $\frac{4}{5}$

۷۶- طول عمر باتری‌های اتومبیل ساخت یک کارخانه متغیر تصادفی X بر حسب سال بوده که دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

کارخانه سازنده، باتری‌ها را به مدت ۶ ماه گارانتی کرده است. اگر وزارتخانه‌ای برای اتومبیل‌های خود تعداد ۱۰۰ عدد از این باتری‌ها را خریداری کند، تعداد مورد انتظار باتری‌های مرجوعی کدام است؟

(۱) ۱۸

(۲) ۲۳

(۳) ۳۴

(۴) ۸۶

۷۷- فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ که در آن σ^2 معلوم است. حجم نمونه لازم برای آزمون $H_0: \mu = \mu_0$ در مقابل $H_1: \mu = \mu_1$ با احتمال خطای نوع اول و دوم، به ترتیب α و β کدام است؟

$$n = \frac{z_{\alpha}^2 \sigma^2}{\mu_1^2} \quad (1)$$

$$n = \frac{(z_{\alpha} + z_{\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \quad (2)$$

$$n = \frac{\left(\frac{z_{\alpha}}{2} + \frac{z_{\beta}}{2} \right)^2 \sigma^2}{(\mu_1 + \mu_0)^2} \quad (3)$$

$$n = \frac{(z_{\alpha} + z_{\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_1 + \mu_0)^2} \quad (4)$$

۷۸- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی دو تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_{\theta}(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1$$

اگر ناحیه بحرانی آزمون فرض $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta = 2$ به صورت $X_1 X_2 > \frac{3}{4}$ باشد، توان این آزمون کدام است؟

$$\frac{7}{16} - \frac{9}{8} \ln \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{7}{16} + \frac{9}{8} \ln \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{7}{16} + \frac{8}{9} \ln \frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{7}{16} + \frac{9}{8} \ln \frac{4}{3} \quad (4)$$

۷۹- از بین ۵۰ زن، ۳۵ نفر و از بین ۴۰ مرد، ۲۰ نفر به آمار علاقه‌مندی نشان داده‌اند. در آزمون علاقه‌مندی بیشتر زنان نسبت به مردان، سطح معنی‌داری به کدام یک از مقادیر زیر نزدیک‌تر است؟

$$0.01 \quad (1)$$

$$0.025 \quad (2)$$

$$0.05 \quad (3)$$

$$0.1 \quad (4)$$

۸۰- فرض کنید ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یافته‌های یک نمونه تصادفی ۵ تایی از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس ۲۵ باشد. یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای میانگین جامعه کدام است؟ ($\sqrt{0.5} \approx 0.71$)

$$(-0.65, 2.65) \quad (1)$$

$$(-1.132, 3.132) \quad (2)$$

$$(-0.51, 2.5) \quad (3)$$

$$(-0.17, 2.17) \quad (4)$$

۸۱- از یک نمونه تصادفی ۵۶۰ تایی از محصولات تولید شده در شیفت اول یک کارخانه، ۱۴ تای آن خراب است. یک نمونه تصادفی ۵۱۰ تایی از محصولات تولید شده در شیفت دوم گرفته می‌شود. اگر بدانیم فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای تفاضل نسبت‌های واقعی محصولات معیوب تولید شده‌ی شیفت اول از شیفت دوم برابر $(۰/۰۱۲, ۰/۰۲۸)$ است، تعداد محصولات معیوب در نمونه‌ی شیفت دوم کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۱۲

(۳) ۱۵

(۴) ۱۷

۸۲- مدیر یک کارخانه تولیدکننده لامپ می‌گوید ۱۰٪ از تولیدات این کارخانه معیوب است. اما مسئول کنترل کیفیت کارخانه مدعی است که ۲۰٪ از لامپ‌های تولیدی معیوب هستند. برای بررسی وضعیت تولید در این کارخانه مسئول کنترل کیفیت، یک به یک لامپ‌ها را از خط تولید انتخاب کرده و آزمایش می‌کند تا اولین لامپ معیوب مشاهده شود. فرض کنید اولین لامپ در نمونه‌گیری سوم مشاهده شود، در این صورت p -مقدار آزمون کدام است؟

(۱) ۰/۰۵

(۲) ۰/۱۹

(۳) ۰/۲۷۱

(۴) ۰/۳۶

۸۳- فرض کنید $۰/۵, ۰/۸, ۰/۶, ۰/۹$ یافته‌های یک نمونه تصادفی چهارتایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_{\theta}(x) = \frac{2x}{1-\theta^2}, \quad \theta \leq x < 1$$

برآورد ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟

(۱) ۰/۵

(۲) ۰/۶

(۳) ۰/۷

(۴) ۰/۹

۸۴- فرض کنید متغیر تصادفی Y دارای تابع چگالی احتمال $f(y; \theta) = 2\theta^{-2}y$ ، $0 \leq y \leq \theta$ و $\theta > 0$ باشد. بر اساس یک مشاهده Y ، یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی برای θ کدام است؟

$$\left(\frac{Y}{1-\frac{\alpha}{2}}, \frac{Y}{\frac{\alpha}{2}} \right) \quad (۱)$$

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}Y, \sqrt{1-\frac{\alpha}{2}}Y \right) \quad (۲)$$

$$\left(\frac{Y}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{Y}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \right) \quad (۳)$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}Y, \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)Y \right) \quad (۴)$$

۸۵- فرض کنید مدت زمان تأخیر در پروازهای یک شرکت هواپیمایی متغیر تصادفی X بر حسب دقیقه بوده که از تابع چگالی احتمال زیر تبعیت می‌کند:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

اگر میانگین زمان تأخیر در ۱۵ پرواز از این شرکت ۴۵ دقیقه به دست آمده باشد، یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین مدت زمان تأخیر در پروازهای این شرکت هواپیمایی کدام است؟

$$(1) \left(\frac{1350}{44/460}, \frac{1350}{15/207} \right)$$

$$(2) \left(\frac{1350}{46/979}, \frac{1350}{16/790} \right)$$

$$(3) \left(\frac{1350}{26/118}, \frac{1350}{5/6287} \right)$$

$$(4) \left(\frac{1350}{27/488}, \frac{1350}{6/2621} \right)$$

آمار کاربردی - رگرسیون

۸۶- در مدل رگرسیون خطی $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ متغیرهای مستقل X_1 و X_2 غیروابسته‌اند. اگر $R^2(X_2 | X_1)$ ضریب تعیین ناشی از افزودن X_2 به مدل شامل X_1 باشد و $R^2(X_2)$ ضریب تعیین مدل Y بر حسب X_2 باشد، گزینه صحیح کدام است؟

$$(1) R^2(X_2 | X_1) = R^2(X_2)$$

$$(2) R^2(X_2 | X_1) \neq R^2(X_2)$$

$$(3) R^2(X_2 | X_1) \leq R^2(X_2)$$

$$(4) R^2(X_2 | X_1) \geq R^2(X_2)$$

۸۷- خط رگرسیون زیر به داده‌ها برازش می‌شود:

$$\hat{Y} = 4 + 2X_1 + 3X_2 + 5X_1X_2$$

اگر X_1 مقدار ثابت ۵ را اختیار کند، مقدار تغییر در \hat{Y} وقتی X_2 به میزان یک واحد افزایش یابد، چقدر است؟

۸۸- در مدل رگرسیون خطی چندگانه چنانچه ضریب β_1 را به فاصله $[a, b]$ محدود کنیم و مجموع مربعات خطا تحت این

محدودیت و بدون این محدودیت را به ترتیب با SS_E^C و SS_E نمایش دهیم، گزینه صحیح کدام است؟

$$SS_E^C \geq SS_E \quad (2)$$

$$SS_E^C = SS_E \quad (1)$$

$$SS_E^C \leq SS_E \quad (3)$$

(۴) بستگی به داده‌ها دارد.

۸۹- خط رگرسیونی $\hat{Y} = b_1 X$ را به داده‌ها برازش می‌کنیم. اگر میانگین‌های Y و X به ترتیب برابر ۲ و ۶ باشد، آنگاه مقدار b_1 کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

۹۰- در مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ که در آن $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ و σ^2 معلوم است. اگر $\hat{\beta}$ برآورد حداقل

مربعات β باشد، مقدار $P(\hat{\beta} > \beta)$ کدام است؟

(۱) کمتر از ۰/۵

(۲) کمتر یا مساوی ۰/۵

(۳) بیشتر از ۰/۵

(۴) ۰/۵

۹۱- مدل خطی ساده $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ را به داده‌های زیر برازش، پارامترها را برآورد و با b_0 و b_1 نمایش می‌دهیم. این در

حالی است که مدل درست شامل جمله $\beta_2 x^2$ نیز در مدل بالا بوده است. کدام گزینه برای برآوردگرهای b_0 و b_1 صحیح است؟

x	۱	۱	۰	۰	۰	-۱	-۱
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

(۲) b_0 و b_1 هر دو اریب هستند.

(۱) b_0 ناریب و b_1 اریب است.

(۴) b_0 اریب و b_1 ناریب است.

(۳) b_0 و b_1 هر دو ناریب هستند.

۹۲- متغیر Y را روی متغیر کیفی X با ۵ سطح رگرسیون می‌کنیم. اگر در هر سطح ۵ تکرار وجود داشته باشد تحت نرمال بودن

توزیع خطای مدل، برای آزمون معنی‌دار نبودن اثر X روی Y توزیع آماره آزمون کدام است؟

$$F_{4,10} \quad (1)$$

$$F_{5,10} \quad (2)$$

$$F_{4,12} \quad (3)$$

$$F_{5,12} \quad (4)$$

۹۳- مدل $y = \beta_0 e^{\beta_1 x} \varepsilon$ را به داده‌های زیر برازش می‌کنیم. اگر b_0 و b_1 برآوردهای پارامترهای β_0 و β_1 به روش حداقل

مربعات باشند، مقدار $-\frac{b_0}{b_1}$ کدام است؟

x	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
y	$e^{1/5}$	e^2	$e^{1/5}$	e^1	e^2	$e^{2/5}$	$e^{2/5}$	e^2

$$-\frac{3}{4}e^{\frac{9}{4}} \quad (1)$$

$$-\frac{4}{3}e^{\frac{9}{4}} \quad (2)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$+2 \quad (4)$$

۹۴- در مدل رگرسیون خطی $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ با شرط $\varepsilon_i \sim N(0, x_i \sigma^2)$ ، بر اساس داده‌های زیر برآورد σ^2 کدام است؟

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
y_i	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰/۴	۰/۵	۰/۵	۰/۷	۱

$$\frac{1}{700} \quad (1)$$

$$\frac{1}{490} \quad (2)$$

$$\frac{1}{350} \quad (3)$$

$$\frac{1}{210} \quad (4)$$

۹۵- کدام عبارت در مورد خط برازش شده به روش کمترین توان‌های دوم درست نمی‌باشد؟

(۱) مجموع باقیمانده‌ها برابر صفر است.

(۲) \bar{Y} و \bar{X} همیشه بر روی خط برازش شده قرار دارند.

(۳) تعداد نقاط بالا و پایین خط برازش شده برابر هستند.

(۴) میانگین مقادیر برازش شده برابر میانگین مقادیر مشاهده شده است.

۹۶- در مدل رگرسیون خطی $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ که در آن ε_i دارای میانگین صفر و واریانس σ^2 است. با استفاده از اطلاعات زیر، مقدار واریانس مربوط به باقیمانده دوم $\text{Var}(\varepsilon_2)$ کدام است؟ ($S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵

- (۱) σ^2
 (۲) $\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$
 (۳) $\frac{2\sigma^2}{S_{xx}}$
 (۴) $\frac{7\sigma^2}{S_{xx}}$

۹۷- اگر ضریب تعیین رگرسیون متغیر مستقل اول بر روی سایر متغیرهای مستقل برابر ۰/۵۴۶ باشد، آنگاه عامل تورم واریانس این متغیر کدام است؟

- (۱) ۱/۴۲
 (۲) ۲/۳۰
 (۳) ۳/۷۸
 (۴) ۷/۴۲

۹۸- در مدل رگرسیون اگر خطا دارای توزیع نمایی باشد برای تثبیت واریانس کدام تبدیل مناسب‌تر کدام است؟

- (۱) y^{-1}
 (۲) $y^{-\frac{1}{2}}$
 (۳) $y^{\frac{1}{2}}$
 (۴) $\ln y$

۹۹- با توجه به اطلاعات زیر، مقدار آماره آزمون برای $H_0: \beta_1 = 0$ در مدل رگرسیون خطی $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ کدام است؟

$$n = 7, \quad \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 160, \quad SSR = 140, \quad (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۱) ۰/۴
 (۲) ۲
 (۳) $\sqrt{5}$

۱۰۰- چنانچه متغیرهای X و Y در یک مدل خطی ساده رگرسیونی $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ را استاندارد کنیم و آنها را با X^* و Y^* نمایش دهیم، برآورد شیب خط در مدل جدید کدام است؟

$$\frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \quad (۱)$$

$$\sum X_i^* Y_i \quad (۲)$$

$$\frac{\sum (X_i - \bar{X}) Y_i}{\sqrt{[\sum (X_i - \bar{X})^2][\sum (Y_i - \bar{Y})^2]}} \quad (۳)$$

$$\frac{\sum (X_i - \bar{X}) Y_i}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad (۴)$$

آمار کاربردی - نمونه‌گیری

۱۰۱- اگر در جامعه‌ای به حجم ۸۰، نمونه‌ای به روش سیستماتیک به حجم $n = ۸$ بگیریم و S^2 نمونه برابر با ۸ باشد، در صورتی که ضریب همبستگی سیستماتیک در جامعه $\rho = -\frac{1}{79}$ باشد، برآورد واریانس برآوردکننده میانگین جامعه کدام است، آیا این برآورد ناریب است؟

$$\frac{9}{10}, \text{ بلی} \quad (۱)$$

$$\frac{9}{10}, \text{ خیر} \quad (۲)$$

$$۹, \text{ خیر} \quad (۳)$$

$$۹, \text{ بلی} \quad (۴)$$

۱۰۲- جامعه‌ای از سه طبقه به حجم‌های ۲۰، ۴۰ و ۴۰ تشکیل شده است. می‌خواهیم به روش نمونه‌گیری طبقه‌ای و با استفاده از تخصیض متناسب، میانگین جامعه را با گران خطائی برابر ۰/۵ (با اعتماد ۹۵ درصد) برآورد کنیم. اگر واریانس صفت مورد بررسی در این طبقات به ترتیب برابر ۴، ۸ و ۱۵ باشند و صدک ۹۷/۵ درصدی توزیع نرمال استاندارد را برابر ۲ در نظر بگیریم، حجم نمونه لازم از طبقه اول کدام است؟

$$۱۰ \quad (۱)$$

$$۱۳ \quad (۲)$$

$$۳۲ \quad (۳)$$

$$۶۲ \quad (۴)$$

۱۰۳- فرض کنید V_{prop} ، V_{opt} و V_{ran} به ترتیب واریانس برآوردهای معمول تحت نمونه‌گیری تصادفی ساده، طبقه‌ای با تخصیص بهینه و طبقه‌ای با تخصیص متناسب برای یک اندازه نمونه معلوم باشند. اگر حجم طبقات به اندازه کافی بزرگ باشد آن‌گاه:

$$V_{opt} \leq V_{ran} \leq V_{prop} \quad (۱)$$

$$V_{ran} \leq V_{opt} \leq V_{prop} \quad (۲)$$

$$V_{ran} \leq V_{prop} \leq V_{opt} \quad (۳)$$

$$V_{opt} \leq V_{prop} \leq V_{ran} \quad (۴)$$

۱۰۴- جامعه‌ای به حجم ۲۰۰، از ۲۰ خوشه هم حجم تشکیل شده است. اگر واریانس (تغییرات) بین میانگین‌های خوشه‌های جامعه برابر ۳۶ باشد و دو روش تصادفی ساده و خوشه‌ای یک مرحله‌ای دارای کارایی یکسانی باشند، واریانس جامعه چقدر است؟

$$۷۲ \quad (۱)$$

$$۳۶۰ \quad (۲)$$

$$۷۲۰ \quad (۳)$$

$$۳۶۰۰ \quad (۴)$$

۱۰۵- یک جامعه به حجم ۱۰۰ را به دو طبقه با وزن‌های به ترتیب ۰/۴ و ۰/۶ افراز کرده‌ایم به طوری که انحراف معیار هر طبقه برابر با ۱۰ است. برای اینکه انحراف معیار برآوردهای میانگین جامعه مساوی دو باشد، حجم نمونه‌های انتخابی در دو طبقه کدام است؟

$$n_1 = ۴ \text{ و } n_2 = ۶ \quad (۱)$$

$$n_1 = ۲۰ \text{ و } n_2 = ۳۰ \quad (۲)$$

$$n_1 = ۸ \text{ و } n_2 = ۱۲ \quad (۳)$$

$$n_1 = ۱۰ \text{ و } n_2 = ۱۵ \quad (۴)$$

۱۰۶- برای برآورد تعداد پذیرفته شدگان آزمون سراسری در بین ۱۰۰۰ دانش‌آموز دوره پیش‌دانشگاهی در یک شهر که در ۳۰ کلاس درس تحصیل می‌کرده‌اند، نمونه‌ای ۵ تایی از این کلاس‌ها به روش با جایگذاری و با احتمالی متناسب با حجم کلاس‌ها، انتخاب نموده‌ایم که نتایج بررسی‌ها در جدول زیر درج شده است:

تعداد دانش‌آموزان	۳۰	۴۰	۲۰	۲۰	۲۰
تعداد قبولی	۱۵	۱۰	۱۰	۱۰	۱۵

برآورد تعداد کل پذیرفته شدگان در این شهر کدام است؟

$$(۱) \quad ۲۵۰ \text{ نفر}$$

$$(۲) \quad ۳۸۴ \text{ نفر}$$

$$(۳) \quad ۵۰۰ \text{ نفر}$$

$$(۴) \quad ۵۷۶ \text{ نفر}$$

۱۰۷- برای برآورد تعداد کل خرگوش‌های یک ناحیه، ۲۰۰ خرگوش را به دام انداخته و پس از علامت‌گذاری رها می‌کنیم. چند روز بعد مستقل از دام‌گذاری قبل، ۱۲۰ خرگوش را به دام انداخته متوجه می‌شویم ۴۰ تای آنها علامت دارند. برآورد تعداد کل خرگوش‌ها کدام است؟

- (۱) ۵۸۰
(۲) ۶۰۰
(۳) ۶۰۵
(۴) ۶۲۰

۱۰۸- در نمونه‌گیری تصادفی ساده برای برآورد میانگین جامعه همواره برآوردگر از دقت کمتری نسبت به برآوردگر برخوردار است.

- (۱) معمولی - رگرسیون
(۲) نسبتی - معمولی
(۳) معمولی - نسبتی
(۴) رگرسیونی - معمولی

۱۰۹- جامعه‌ای متناهی به حجم N مفروض است. برای برآورد میانگین آن، نمونه تصادفی ساده با جایگذاری می‌گیریم و آن قدر به نمونه‌گیری ادامه می‌دهیم تا در این نمونه n_1 واحد متمایز داشته باشیم. اگر فراوانی واحد r ام برابر با f_r ، $\sum_{r=1}^{n_1} f_r = n$ ،

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n_1} f_r Y_r \text{ و } \bar{Y}_{n_1} = \frac{1}{n_1} \sum_{r=1}^{n_1} Y_r$$

مقدار $E(n)$ کدام است؟

$$\frac{n_1}{N} \quad (۱)$$

$$\frac{n}{N} \quad (۲)$$

$$N \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{N-n_1+1} \right) \quad (۳)$$

$$N \left(1 + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N-n_1} \right) \quad (۴)$$

۱۱۰- اگر در نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری به حجم n از جامعه‌ای N عضوی، فرض کنیم به ازای $i = 1, \dots, N$ تعداد دفعاتی باشد که عنصر i ام جامعه در این نمونه ظاهر خواهد شد، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

$$\text{Var}(t_i) = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \quad (۱)$$

$$\text{Var}(t_i) = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N} \right) \quad (۲)$$

$$\text{Var}(t_i) = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{n}{N} \right) \quad (۳)$$

$$\text{Var}(t_i) = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \quad (۴)$$

۱۱۱- مساحت زیر کشت برنج ۱۰۰ مزرعه ۸۰۰ هکتار است. برای تعیین برآورد کل محصول برنج این مزارع به روش تصادفی ساده بدون جایگذاری ۱۵ مزرعه که مجموع مساحت‌های زیر کشت برنج آنها ۱۵۰ هکتار است انتخاب شده‌اند. میانگین محصول برنج این مزارع نمونه ۱۶ تن بوده است. برآورد نسبتی کل محصول برنج این ۱۰۰ مزرعه چند تن است؟

(۱) ۱۲۸

(۲) ۱۸۲۰

(۳) ۸۱۲

(۴) ۱۲۸۰

۱۱۲- تحت چه شرایطی به ترتیب روش‌های نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای و نمونه‌گیری طبقه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند؟
(۱) خوشه‌ها تا حد امکان شبیه به هم و عناصر درون آن مشابه، طبقات تا حد امکان متفاوت و عناصر درون آن متفاوت باشند.
(۲) خوشه‌ها تا حد امکان متفاوت و عناصر درون آن متفاوت، طبقات تا حد امکان شبیه به هم و عناصر درون آن متفاوت باشند.

(۳) خوشه‌ها تا حد امکان متفاوت و عناصر درون آن همگن، طبقات تا حد امکان همگن و عناصر درون آن همگن باشند.

(۴) خوشه‌ها تا حد امکان شبیه به هم و عناصر درون آن متفاوت، طبقات تا حد امکان متفاوت و عناصر درون آن همگن باشند.

۱۱۳- برای برآورد درصد دانشجویانی که حداقل یک بار در سال به پزشک مراجعه می‌نمایند، لازم است یک نمونه تصادفی ساده از ۵۰۰۰ دانشجوی دانشکده علوم گرفته شود. اندازه نمونه چقدر باشد تا با حداقل ۹۵ درصد اطمینان، خطای مطلق برآورد ۱۰ درصد شود؟ ($Z_{0.975} = 2$)

(۱) ۹۰

(۲) ۹۵

(۳) ۹۹

(۴) ۱۰۴

۱۱۴- کدام عبارت صحیح است؟

(۱) نمونه‌گیری تصادفی با طبقه‌بندی (طبقه‌ای) حالت خاصی از نمونه‌گیری خوشه‌ای دو مرحله‌ای است.

(۲) نمونه‌گیری سیستماتیک حالت خاصی از نمونه‌گیری خوشه‌ای دو مرحله‌ای است.

(۳) نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای حالت خاصی از نمونه‌گیری سیستماتیک است.

(۴) نمونه‌گیری تصادفی با طبقه‌بندی (طبقه‌ای) حالت خاصی از نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای است.

۱۱۵- یک کارتن تخم‌مرغ شامل ۲۰ شانه و هر شانه شامل ۳۰ تخم‌مرغ است. به منظور برآورد نسبت تخم‌مرغ‌هایی که در این کارتن میزان کلسترول از حد مجاز بیشتر دارند، تعداد ۳ شانه را به تصادف انتخاب کرده از شانه اول ۲۰، شانه دوم ۱۰ و شانه سوم ۵ تخم‌مرغ را مجدداً به تصادف انتخاب و آنها را مورد آزمایش قرار داده‌ایم. مشخص شده است به ترتیب تعداد ۵، ۳ و ۱ تخم‌مرغ بیش از میزان مجاز کلسترول داشته‌اند. برآورد نسبت مورد نظر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{10}$ (۴) $\frac{4}{15}$

۱۱۶- فرض کنید $X \sim U(0, 1)$ ، مقدار $E(X^{-\frac{1}{2}}(1-X)^{\frac{1}{2}})$ کدام است؟

$$(1) \frac{10! 2^{20}}{20!}$$

$$(2) \frac{(10!)^2 2^{21}}{21!}$$

$$(3) \frac{(10!)^2 2^{20}}{20!}$$

$$(4) \frac{\Gamma(11/2)}{\Gamma(0/2)\Gamma(11)}$$

۱۱۷- یک سکه سالم را حداقل چند بار باید پرتاب کرد تا با احتمال دست کم $0/9$ نسبت دفعاتی که شیر مشاهده می‌شود بین $0/4$ و $0/6$ باشد؟

$$(1) 250 \text{ بار}$$

$$(2) 520 \text{ بار}$$

$$(3) 570 \text{ بار}$$

$$(4) 750 \text{ بار}$$

۱۱۸- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسن با پارامتر λ باشد. احتمال آنکه متغیر تصادفی X مقادیر زوج را اختیار کند کدام است؟ (صفر را نیز زوج محسوب کنید).

$$(1) \frac{e^{\lambda}(e^{-\lambda} + e^{\lambda})}{2}$$

$$(2) \frac{e^{-\lambda} + e^{\lambda}}{2}$$

$$(3) \frac{e^{-\lambda} + e^{\lambda}}{4}$$

$$(4) \frac{e^{-\lambda}(e^{-\lambda} + e^{\lambda})}{2}$$

۱۱۹- اگر $Z \sim N(0, 1)$ و $X = \max\left\{|Z|, \frac{1}{|Z|}\right\}$ باشد، مقدار $P\{X \leq 4\}$ کدام است؟ $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است.

$$\frac{1}{2} \left[\Phi(4) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) \right] \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \left[\Phi(4) + \Phi\left(\frac{1}{4}\right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left[\Phi(4) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \left[\Phi(4) - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) \right] \quad (4)$$

۱۲۰- فرض کنید $P(B) = 1$. برای هر پیشامد A ، مقدار $P(A | B)$ کدام است؟

(۱) یک

(۲) $P(A)$

(۳) $P(B - A)$

(۴) $P(A - B)$

۱۲۱- تعداد n جعبه موجود است. در جعبه اول یک مهره سفید و $(n-1)$ مهره سیاه و در جعبه دوم دو مهره سفید و $(n-2)$ مهره سیاه و ... و در جعبه n -ام n مهره سفید وجود دارد. به تصادف از هر جعبه مهره‌ای را خارج می‌کنیم. انتظار می‌رود کلاً چند مهره سفید از جعبه‌ها خارج شده باشد؟

$$\frac{n}{2} \quad (1)$$

$$\frac{n+1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad (3)$$

$$n \quad (4)$$

۱۲۲- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع از $N(0, 1)$ باشند و $Y_i = (n+1)\Phi(X_i)$ باشد. اگر $i = 1, \dots, n$ که در آن Φ نمایانگر تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. اگر $Y_{(n)} = \max(Y_1, \dots, Y_n)$ باشد مقدار $E(Y_{(n)})$ کدام است؟

(۱) n (۲) $n+1$ (۳) $\frac{n}{n+1}$ (۴) $\frac{n+1}{n}$

۱۲۳- فرض کنید متغیر تصادفی Y دارای تابع احتمال زیر باشد:

$Y = y$	-1	1
$P(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

اگر $Y = \ln X$ مقدار $\text{var}(\sqrt{X})$ کدام است؟

(۱) $\frac{e^{-1} + e + 4}{4}$ (۲) $\frac{e^{-1} + e - 4}{4}$ (۳) $\frac{e^{-1} + e - 2}{4}$ (۴) $\frac{e^{-1} + e + 2}{4}$

۱۲۴- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta$$

تابع مولد گشتاور $U = -(\ln X - \ln \theta)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{1-t}$ (۲) $\frac{1}{1-\theta t}$ (۳) $\frac{\theta}{\theta-t}$ (۴) $\frac{1}{t}$

۱۲۵- تابع توزیع متغیر تصادفی X برابر $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x^2 - 2x + 2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$ است، مقدار $E(X)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$
(۲) $\frac{7}{6}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{2}{3}$

۱۲۶- در لحظه صفر، n فرد در یک اتاق هستند، افراد به مرور زمان از اتاق خارج می‌شوند. فرض کنید مدت زمانی که هر فرد در اتاق می‌ماند متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ است. متوسط تعداد افرادی که تا لحظه t در اتاق هستند کدام است؟

- (۱) $ne^{-\lambda t}$
(۲) $ne^{\lambda t}$
(۳) $n(1 - e^{-\lambda t})$
(۴) $\frac{ne^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}}$

۱۲۷- فرض کنید $M(t) = \frac{1}{2}(1 + \cosh t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X باشد. مقدار $P(X^2 = 1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
(۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۱

۱۲۸- فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی برنولی مستقل باشند به طوری که $P(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}$ اگر N

تعداد آزمایشات لازمه تا مشاهده اولین موفقیت باشد، مقدار $E(N)$ کدام است؟

$$\frac{1}{e} \quad (۱)$$

$$1 - \frac{1}{e} \quad (۲)$$

$$1 + \frac{1}{e} \quad (۳)$$

$$e \quad (۴)$$

۱۲۹- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع هندسی و تابع احتمال $f_X(x) = p q^x$ ، $x = 0, 1, \dots$ باشد. اگر

$Y = \max(X, M)$ و $M > 0$ یک عدد صحیح باشد، مقدار $E(Y)$ کدام است؟

$$\frac{q^{M+1}}{p} \quad (۱)$$

$$M + \frac{q^{M+1}}{p} \quad (۲)$$

$$Mp + \frac{q^{M+1}}{p} \quad (۳)$$

$$Mq + \frac{q^{M+1}}{p} \quad (۴)$$

۱۳۰- اگر X یک متغیر تصادفی بواسون با میانگین λ باشد، مقدار $E\left(\frac{X}{k}\right)$ (که یک عدد صحیح بین صفر و X است)،

$$\lambda^k \quad (۱)$$

$$\lambda^{k+1} \quad (۲)$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} \quad (۳)$$

$$\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \quad (۴)$$

۱۳۱- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی به ترتیب با توابع توزیع F و G باشند. برای هر $x \in \mathbb{R}$ مقدار

$P(X < x \leq Y) - P(Y < x \leq X)$ کدام است؟

$$F(x^-) - G(x) \quad (۱)$$

$$F(x) - G(x^-) \quad (۲)$$

$$F(x) - G(x) \quad (۳)$$

$$F(x^-) - G(x^-) \quad (۴)$$

۱۳۲- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع هندسی با تابع احتمال زیر باشد:

$$f_p(k) = pq^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

مقدار $E\left(\frac{X+Y+1}{X+1}\right)$ کدام است؟

(۱) $-\ln p$

(۲) $1 - \ln p$

(۳) $-\ln q$

(۴) $1 - \ln q$

۱۳۳- متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 هم توزیع، مستقل و مثبت می‌باشند و داریم $E\left(\frac{w_1 X_1 + w_2 X_2}{X_1 + X_2}\right) = \frac{1}{4}$ مقدار $w_1 + w_2$

کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۱۳۴- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع باشند. اگر تابع مولد گشتاور $X + Y$ برابر

$$e^{2t} + 0.9e^{-2t} + 0.24e^{-t} + 0.34 + 0.24e^t + 0.9e^{2t}$$

باشد، مقدار $P(X \leq 0)$ کدام است؟

(۱) ۰/۱

(۲) ۰/۳

(۳) ۰/۴

(۴) ۰/۷

۱۳۵- نقطه‌ای به تصادف از داخل نیم دایره شکل زیر انتخاب می‌کنیم. اگر (X, Y) نمایانگر مختصات نقطه انتخابی باشد،

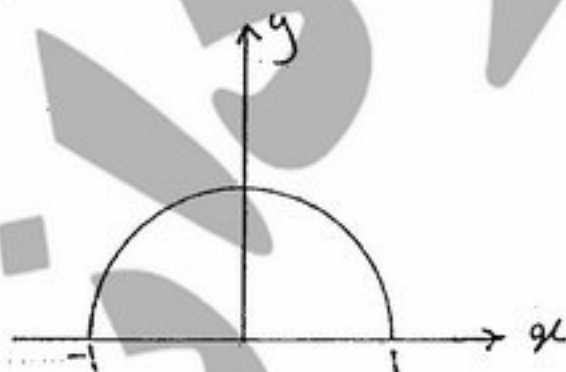
$\text{var}(X | Y = y)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1-y^2}{2}$

(۲) $\frac{1+y^2}{2}$

(۳) $\frac{1-y^2}{3}$

(۴) $\frac{1+y^2}{3}$



۱۳۶- فرض کنید (X, Y) دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشد:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \phi(x; \mu_1, \sigma^2) \phi(y; 2, 1) + \frac{1}{2} \phi(x; \mu_2, \sigma^2) \phi(y; 1, 1)$$

که در آن $\phi(x; \mu, \sigma^2)$ نمایانگر تابع چگالی احتمال توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است. مقدار $\text{cov}(X, Y)$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) $\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}$

(۳) $\frac{\mu_1 + \mu_2}{4}$

(۴) $\frac{\mu_1 - \mu_2}{4}$

۱۳۷- فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 < x_1 < 2, \quad 0 < x_2 < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ضریب همبستگی $X_1 + X_2$ و $X_1 - X_2$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۱۳۸- فرض کنید X_1, X_2, X_3 متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند که در آن X_1, X_2 دارای توزیع یکسان نمایی با پارامتریک و X_3 دارای توزیع یکنواخت در فاصله‌ی $(0, 1)$ است. مقدار $P(\min(X_1, X_2) < X_3)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1 - e^{-2}}{2}$

(۲) $\frac{1 - e^{-2}}{4}$

(۳) $\frac{1 + e^{-2}}{2}$

(۴) $\frac{1 + e^{-2}}{4}$

۱۳۹- فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با تابع احتمال زیر باشند.

$$P(X_n = 0) = 1 - p^n = 1 - P(X_n = 1), \quad 0 < p < 1$$

دنباله X_n در احتمال همگرا به کدام مقدار است؟

(۱) ۰

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

۱۴۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی غیرمنفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع F باشند. همچنین فرض کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lambda$$

توزیع حدی $nX_{(1)}$ کدام است؟

(۱) $E(\lambda)$

(۲) $u(0, \lambda)$

(۳) $E(\lambda, 1)$

(۴) $N(\lambda, 1)$

۱۴۱- فرض کنید $Y_i = \frac{2X_i}{X_i + 1}$, $i = 1, \dots, n$ که در آن X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x > 0$$

باشد. مقدار $\text{var}\left(\prod_{i=1}^n Y_i\right)$ کدام است؟

(۱) $\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1$

(۲) $\left(\frac{4}{3}\right)^n$

(۳) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(۴) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

۱۴۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با پارامتر p باشند. برآوردکننده نااریب برای

$$Y = (X_1 + X_2^2 + \dots + X_n^n)^2$$

کدام است؟

(۱) $p + p^2 + \dots + p^n$

(۲) $n(p + p^2 + \dots + p^n)$

(۳) $np(1-p) + n^2 p^2$

(۴) $np(1-p) + np^2$

۱۴۳- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, \sigma^2)$ باشد. اگر آماره T ، MLE، پارامتر σ^2 باشد،

$\text{var}(T)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sigma^2}{n-1}$

(۲) $\frac{\sigma^2}{n}$

(۳) $\frac{\sigma^2}{n^2}$

(۴) $\frac{\sigma^2}{(n-1)^2}$

۱۴۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x; \theta, p) = (1-p)p^{x-\theta}, \quad x = \theta, \theta+1, \theta+2, \dots, \quad 0 < p < 1$$

آماره بسنده برای (θ, p) کدام است؟

(۱) (\bar{X}, S^2)

(۲) $(X_{(1)}, \sum X_i)$

(۳) $(X_{(1)}, X_{(n)})$

(۴) $(\sum X_i, X_{(n)})$

۱۴۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $B(1, \theta)$ باشد. با تعریف

$$a) \sum_{i=1}^n X_i, \quad b) \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad c) \sum_{i=1}^n (1-X_i), \quad d) \sum_{i=1}^n (1-X_i)^2$$

کدام یک از آماره‌های فوق بسنده می‌باشند؟

(۱) a, b

(۲) a, b, c, d

۱۴۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد:

$$f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, \dots$$

اگر $c(\theta) = P_\theta(X_1 = 0)$ برآوردگر UMVU برای $c(\theta)$ بر حسب $T = \sum_{i=1}^n X_i$ کدام است؟

(۱) $\frac{n}{T}$

(۲) $\frac{T}{n}$

(۳) $\frac{n-1}{n+T-1}$

(۴) $\frac{T(T-1)}{n(n-1)}$

صبح چهارشنبه ۸۸/۱۱/۲۸

(۲۲)

آمار نظری (احتمال کاربرد آن - آمار ریاضی ۱ و ۲)

۱۴۷- فرض کنید X_1, \dots, X_m و Y_1, \dots, Y_n دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $U(0, \theta_1)$ و $U(0, \theta_2)$ باشند.برآوردگر UMVU پارامتر $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ کدام است؟

$$\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{mn} \sum X_i Y_i \quad (2)$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{X_{(m)}}{Y_{(n)}} \quad (3)$$

$$\frac{(m+1)(n-1)}{mn} \cdot \frac{X_{(m)}}{Y_{(n)}} \quad (4)$$

۱۴۸- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین نامعلوم μ و واریانس نامعلوم σ^2 باشد. برآوردگرUMVU پارامتر μ^2 کدام است؟

$$\bar{X}^2 + \frac{r}{n} \bar{X} S^2 \quad (1)$$

$$\bar{X}^2 - \frac{r}{n} \bar{X} S^2 \quad (2)$$

$$\bar{X}^2 - \frac{r}{n} \bar{X}^2 S^2 \quad (3)$$

$$\bar{X}^2 + \frac{r}{n} \bar{X}^2 S^2 \quad (4)$$

۱۴۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, 1)$ باشد. اگر \bar{X} و m به ترتیب نمایانگر میانگین و میانهنمونه‌ای باشند، مقدار $\text{cov}(\bar{X}, m)$ کدام است؟

$$\frac{1}{n} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{n+1} \quad (3)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \quad (4)$$

۱۵۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu, 1)$ باشد. کران پایین کرامر - رانو برای برآورد ناریب $P(X_1 > 2\mu)$ کدام است؟

(۱)

$$\frac{1}{2n\pi} \quad (۲)$$

$$\frac{e^{-\mu^2}}{2n\pi} \quad (۳)$$

$$\frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{2n\pi} \quad (۴)$$

۱۵۱- فرض کنید Y_1, \dots, Y_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت بر روی فاصله $(\theta, \theta+1)$ باشد. اگر $\hat{\theta}_1 = \bar{Y} - \frac{1}{n}$ و

$$\hat{\theta}_2 = Y_{(n)} - \frac{n}{n+1}$$

برآوردگرهای ناریب θ باشند، کارایی $\hat{\theta}_1$ نسبت به $\hat{\theta}_2$ کدام است؟

$$\frac{1}{12} \quad (۱)$$

$$10 \quad (۲)$$

$$\frac{12n}{(n+1)^2(n+2)} \quad (۳)$$

$$\frac{12n^2}{(n+1)^2(n+2)} \quad (۴)$$

۱۵۲- اگر X یک تک مشاهده از تابع چگالی احتمال $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$ و $\left(\frac{Y}{2}, Y\right)$ یک بازه اطمینان برای θ باشد که در آن $Y = -\frac{1}{\ln X}$ ، مقدار ضریب اطمینان بازه فوق کدام است؟

$$e^{-1} - e^{-2} \quad (۱)$$

$$e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} \quad (۲)$$

$$\frac{e^{-1}}{e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}}} \quad (۳)$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}}} \quad (۴)$$

صبح چهارشنبه ۸۸/۱۱/۲۸

(۲۴)

آمار نظری (احتمال کاربرد آن - آمار ریاضی ۱ و ۲)

۱۵۳- می‌دانیم که $P(L(X) \leq \theta) = 1 - \alpha_1$ ، $P(U(X) \geq \theta) = 1 - \alpha_2$ و $P(L(X) < U(X)) = 1$. اگر

$(L(X), U(X))$ به عنوان یک فاصله اطمینان برای θ انتخاب شود. ضریب اطمینان این فاصله اطمینان کدام است؟

$$1 - \alpha_1 - \alpha_2 \quad (۱)$$

$$1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (۲)$$

$$1 - (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (۳)$$

$$1 - \max\{\alpha_1, \alpha_2\} \quad (۴)$$

۱۵۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{یا} \quad f_1(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

علاقمند به آزمون $H_0: f = f_0$ در مقابل $H_1: f = f_1$ هستیم. آماره آزمون به روش نیم - پیرسن کدام است؟

$$\sum (X_i - 1)^2 \quad (۱)$$

$$\sum_{i=1}^n (|X_i| - 1)^2 \quad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (۳)$$

$$\sum |X_i| \quad (۴)$$

۱۵۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)}; \quad x \geq \theta; \quad \theta \in \mathbb{R}$$

ناحیه بحرانی به روش نسبت درستنمایی برای آزمون $H_0: \theta \leq \theta_0$ در مقابل $H_1: \theta > \theta_0$ کدام است؟

$$x_{(n)} \leq \theta_0 \quad (۱)$$

$$x_{(n)} \geq \theta_0 - \frac{1}{n} \ln k \quad (۲)$$

$$x_{(1)} \leq \theta_0 - \frac{1}{n} \ln k \quad (۳)$$

$$x_{(1)} \geq \theta_0 - \frac{\ln k}{n} \quad (۴)$$

۱۵۶- متغیر تصادفی X در فاصله $(0, 1)$ را در نظر بگیرید و بر اساس یک مشاهده، بر توان‌ترین آزمون برای فرض

$H_0: X \sim F(x) = x^2$ در برابر $H_1: X \sim G(x) = x^2$ (توابع توزیع هستند) را در نظر می‌گیریم. اگر α احتمال خطای نوع اول و π توان آزمون باشد، همواره داریم:

$$\alpha = \pi \quad (۱)$$

$$\alpha = \pi^2 \quad (۲)$$

$$\alpha < \pi^2 \quad (۳)$$

$$\alpha > \pi^2 \quad (۴)$$

۱۵۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta x}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{\theta}\right)^2}, \quad x > 0$$

علاقتمند به آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1: \theta > \theta_0$ هستیم. تابع آزمون پر توان ترین آزمون یکنواخت کدام است؟

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \sum \ln^2 x_i > c \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \sum \ln^2 x_i < c \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \sum \ln x_i^2 > c \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (3)$$

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \sum \ln x_i^2 < c \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (4)$$

۱۵۸- فرض کنید $f_{\theta}(x)$ تابع چگالی احتمال توزیع $N(\theta, 1)$ باشد و $g_p(x) = pf_1(x) + (1-p)f_0(x)$ و $0 \leq p \leq 1$ باشد.

برای آزمون $H_0: p = 0$ در مقابل $H_1: p > 0$ بر اساس یک مشاهده x از X ناحیه بحرانی پر توان ترین آزمون به طور یکنواخت به اندازه α کدام است؟ $(P(Z > z_{\alpha}) = \alpha)$

$$x < z_{1-\alpha} \quad (1)$$

$$x > z_{1-\alpha} \quad (2)$$

$$x > z_{\alpha} \quad (3)$$

$$x < z_{\alpha} \quad (4)$$

۱۵۹- یک آزمایش برنولی را ۴ بار مستقلاً انجام می‌دهیم تا p ، شانس پیروزی را بیازمائیم. فرض $H_0: p = \frac{1}{3}$ را در برابر فرض

$H_1: p \neq \frac{1}{3}$ رد می‌کنیم هرگاه یا ۴ پیروزی یا ۴ شکست مشاهده شود. توان آزمون برای $p = \frac{1}{3}$ کدام است؟

$$\frac{1}{81} \quad (1)$$

$$\frac{16}{81} \quad (2)$$

$$\frac{17}{81} \quad (3)$$

$$\frac{17}{27} \quad (4)$$

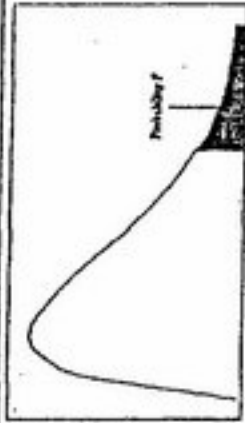
۱۶۰- برای آزمون $H_0: \lambda \leq 1$ در مقابل $H_1: \lambda > 1$ وقتی که $X_1 = 2$ ، $X_2 = 0$ و $X_3 = 1$ مشاهده شده و $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ برای $i = 1, 2, 3$ و X_i ها مستقل هستند، مقدار P (P-Value) کدام است؟

$$\frac{17}{2} e^{-2} \quad (1)$$

$$1 - \frac{17}{2} e^{-2} \quad (2)$$

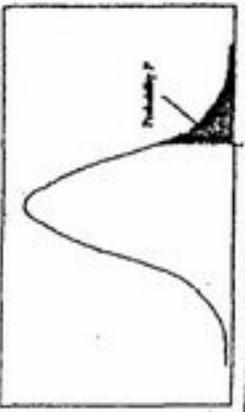
$$1 - 17e^{-2} \quad (3)$$

$$17e^{-2} \quad (4)$$



مقادیر بحرانی توزیع مربع کای

df	.995	.990	.975	.950	.900	.800	.700	.600	.500	.400	.300	.200	.100	.005
1	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013	16.013
2	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509	18.509
3	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024	21.024
4	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582	23.582
5	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154	26.154
6	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758	28.758
7	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297	31.297
8	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801	33.801
9	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191	36.191
10	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582	38.582
11	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902	40.902
12	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154	43.154
13	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152	45.152
14	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999	46.999
15	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788	48.788
16	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521	50.521
17	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203	52.203
18	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772	53.772
19	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338	55.338
20	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899	56.899
21	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449	58.449
22	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989	59.989
23	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518	61.518
24	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037	63.037
25	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548	64.548
26	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051	66.051
27	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547	67.547
28	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036	69.036
29	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518	70.518
30	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983	71.983



مقادیر بحرانی توزیع t

df	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.385	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.231	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.119	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756



سطح زیر منحنی نرمال استاندارد

z	0.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998