



محل امضاء

نام خانوادگی

نام

صبح جمعه
۸۸/۱۱/۳۰
دفترچه ۱/۱



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)

آزمون ورودی دوره های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۸۹

مجموعه ریاضی - کد ۱۲۰۸

مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۲۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

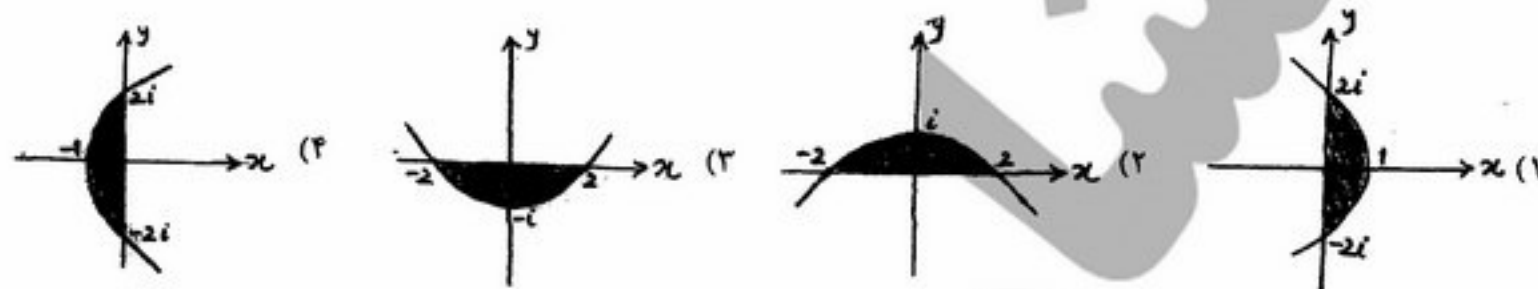
ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	توابع مختلط	۲۰	۱	۲۰
۲	جبر (۱)	۲۰	۲۱	۴۰
۳	آنالیز ریاضی (۱)	۲۰	۴۱	۶۰
۴	آنالیز ریاضی (۲)	۲۰	۶۱	۸۰
۵	آنالیز عددی (۱)	۲۰	۸۱	۱۰۰
۶	جبر خطی	۲۰	۱۰۱	۱۲۰

بهمن ماه سال ۱۳۸۸

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

- ۱- تابع $f(z) = \frac{1}{z(1+z-e^z)}$ در مبدا دارای:
- (۱) قطب مرتبه اول با مانده $-\frac{1}{18}$
- (۲) قطب مرتبه دوم با مانده $\frac{1}{18}$
- (۳) قطب مرتبه سوم با مانده $-\frac{1}{18}$
- (۴) قطب مرتبه سوم با مانده $\frac{1}{18}$

۲- تابع $w = z^2$ ناحیه مثلثی بین خطوط $y = \pm x$ و $y = 1$ را به کدام ناحیه تبدیل می‌کند؟



۳- فرض کنید $f(z) = \frac{1}{z}(z + \frac{1}{z})$. در این صورت تابع f خطوطی را که از مبدأ می‌گذرد به کدام یک از شکل‌های زیر تصویر می‌کند؟

(۱) خط یا دایره

(۲) دایره

(۳) خط

(۴) هذلولی یا جزیی از یک خط

۴- تابع مختلط $f(z) = \exp(\frac{\beta}{z})$ مفروض است. مقدار $|f(z)|$ به ازای z های واقع بر دایره $x^2 + y^2 - \alpha x = 0$ کدام است؟ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

(۱) $\exp(\alpha\beta)$

(۲) $\exp(\frac{\beta}{\alpha})$

(۳) $\exp(\frac{\alpha}{\beta})$

(۴) $\exp(\frac{1}{\alpha\beta})$

۵- فرض کنید $f(z)$ بر مجموعه $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ تحلیلی باشد و برای هر $z \in D$ ، $\operatorname{Re} f(z) = 2$ در این صورت:

(۱) f روی D الزاماً تابع ثابت ۲ است.

(۲) $\operatorname{Im} f$ روی D الزاماً برابر با صفر است.

(۳) f روی D ثابت است.

(۴) f روی D به صورت $f(z) = 2 + ie^y$ است که $y = \operatorname{Im} z$.

۶- فرض کنید $\log z$ شاخه‌ای از تابع لگاریتم باشد که $0 < \arg z < 2\pi$. دامنه تحلیلی بودن تابع $f(z) = \log \frac{i-z}{i+z}$ کدام است؟

(۱) تمام نقاط صفحه مختلط بجز نقاطی از محور حقیقی که $x \geq 0$.

(۲) مجموعه نقاط روی و بیرون دایره واحد.

(۳) مجموعه نقاط روی و درون دایره واحد.

(۴) تمام نقاط صفحه مختلط بجز نقاطی از محور موهومی که $|y| \leq 1$.

۷- اگر $f(z)$ تابع تام باشد که $f'(0) = f(0) = 0$ و $\operatorname{Im} f'(z) = 6xy - 2x$ ، آنگاه $f(1)$ کدام عدد است؟

(۱) $1 - i$

(۲) $-1 + i$

(۳) $-1 - i$

(۴) $1 + i$

۸- مقدار میانگین تابع $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ روی دایره $|z - i| = 2$ برابر است با:

(۱) -1

(۲) 0

(۳) $-\pi$

(۴) 1

۹ - فرض کنید C مسیری ساده و بسته در صفحه باشد. فرض کنید تابع f بر روی C پیوسته و در درون C تحلیلی باشد، به علاوه $|f|$ بر روی مسیر C ثابت ناصفر باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) اگر f در درون C صفر داشته باشد، $|f|$ ماکسیمم خود را در درون C می‌گیرد.

(۲) اگر f در درون C صفر داشته باشد، $|f|$ مینیمم خود را در درون C می‌گیرد.

(۳) اگر f در درون C صفر نداشته باشد، $|f|$ ماکسیمم خود را در درون C می‌گیرد.

(۴) اگر f در درون C صفر نداشته باشد، $|f|$ مینیمم خود را در درون C می‌گیرد.

۱۰ - فرض کنید $f(z)$ تابعی نام باشد و برای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $|f(z)| \leq |e^z|$ و $f(0) = 1$. در این صورت:

(۱) برد $f(z)$ مجموعه تمام اعداد مختلط است.

(۲) برای هر $z \in \mathbb{C}$ ، $f(z) = e^z$

(۳) $f(z)$ تابع ثابت است.

(۴) مجموعه صفرهای $f(z)$ ناتهی است.

۱۱ - بسط لوران تابع $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ در طوق $0 < |z-2| < 1$ عبارتست از:

$$\frac{-1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n \quad (1)$$

$$\frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n \quad (2)$$

$$\frac{-1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n \quad (3)$$

$$\frac{-2}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n \quad (4)$$

۱۲ - چند جمله اول بسط مک لورن تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{\sin z^2} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$ عبارت است از:

$$1 + \frac{z^6}{6} - \frac{7z^{12}}{360} + O(|z|^{18}) \quad , \quad |z| < \sqrt[3]{\pi} \quad (1)$$

$$1 + \frac{z^6}{6} + \frac{7z^{12}}{360} + O(|z|^{18}) \quad , \quad |z| < \pi \quad (2)$$

$$1 + \frac{z^6}{6} + \frac{7z^{12}}{360} + O(|z|^{18}) \quad , \quad |z| < \sqrt[3]{\pi} \quad (3)$$

$$1 + \frac{z^6}{6} + \frac{13z^{12}}{360} + O(|z|^{18}) \quad , \quad |z| < \pi \quad (4)$$

۱۳ - برای هر عدد طبیعی n مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} (z + \frac{1}{z})^{2n} \frac{dz}{z}$ برابر است با:

$$2\pi i \binom{2n}{n} \quad (1)$$

$$\binom{2n}{n} \quad (2)$$

$$0 \quad (3)$$

$$2\pi i \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \quad (4)$$

۱۴ - مقدار انتگرال $\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\text{Log}(\text{Log} z)}{z^2 + 1} dz$ ، که در آن Log شاخه اصلی لگاریتم است، برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}i \text{Log} \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\pi \text{Log} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{4}i \quad (2)$$

$$0 \quad (3)$$

$$(4) \text{ انتگرال موجود نیست.}$$

۱۵ - فرض کنید z_0 نقطه تکین تنهای f باشد و $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ برای $0 < |z - z_0| < r$ سری لوران f در z_0 باشد. در این صورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|b_n|} = 1 \quad (۱)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{r} \quad (۲)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|b_n|} = 0 \quad (۳)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|b_n|} = \infty \quad (۴)$$

۱۶ - فرض کنید f در حوزه‌ای شامل دایره Γ و داخل آن تحلیلی باشد و Γ به طور مثبت جهت دار شده باشد و همچنین f تنها دارای یک صفر ساده z_0 در داخل Γ باشد. در این صورت: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$ برابر است با:

$$f'(z_0) \quad (۱)$$

$$z_0 f(z_0) \quad (۲)$$

$$z_0 f'(z_0) \quad (۳)$$

$$z_0 \quad (۴)$$

۱۷ - مقدار مانده تابع $f(z) = e^z \sinh\left(\frac{1}{z}\right)$ در $z = 0$ برابر است با:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!} \quad (۱)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)!} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!} \quad (۴)$$

PardazeshPub.com

$$18 - \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5 + 1} \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{\pi}{5 \sin \frac{\pi}{5}} \quad (2)$$

$$\frac{2\pi}{5 \sin \frac{\pi}{5}} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}} \quad (3)$$

۱۹- فرض کنید C_r نیمدایره فوقانی $|z| = r$ باشد و تابع $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $f(r) = \int_{C_r} \frac{e^{iz} dz}{z}$ تعریف شود که در آن جهت انتگرال گیری روی C_r مثبت است. در این صورت:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) \text{ موجود نیست.} \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 0 \text{ و } \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \pi \quad (1)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = \pi i \text{ و } \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) \text{ موجود نیست.} \quad (3)$$

۲۰- تعداد صفرهای تابع $f(z) = e^{2z} - 9z^2$ در طوق بسته $1 \leq |z| \leq 3$ با احتساب مرتبه چندگانگی آنها برابر است با:

(۱) دو

(۲) یک

(۳) صفر

(۴) چهار

PardazeshPub.com

۲۱- فرض کنید $G = H \times K$ یک گروه ناآبلی باشد که در آن $|H| = p^2$ و $|K| = p^3$ و p عددی اول است. در این صورت $|G'|$ برابر است با:

(۱) p

(۲) p^2

(۳) p^2

(۴) p^4

۲۲- فرض کنید G گروهی دلخواه و H زیرگروهی از G از مرتبه ۲ باشد. در این صورت:

(۱) $H \triangleleft G$

(۲) $C_G(H) = H$

(۳) $N_G(H) = H$

(۴) $C_G(H) = N_G(H)$

۲۳- فرض کنید F یک میدان و $J = \{f \in F[x, y] \mid f(\circ, y) = \circ\}$. در این صورت در حلقه $F[x, y]$:

(۱) J یک ایده آل اول است ولی ایده آل اصلی نیست.

(۲) J یک ایده آل اصلی اول است.

(۳) J یک ایده آل ماکسیمال است ولی ایده آل اصلی نیست.

(۴) J یک ایده آل اصلی ماکسیمال است.

۲۴- فرض کنید G و H گروه هستند و $f: G \rightarrow H$ یک همریختی است. اگر p یک عدد اول به طوری که p مرتبه H را نمی شمارد و $x \in G$ از مرتبه p فرض شود آنگاه:

(۱) $\langle x \rangle \triangleleft \ker f$

(۲) مرتبه $f(x)$ مضربی از p است.

(۳) $x \in \ker f$

(۴) مرتبه $f(x)$ صفر است.

۲۵- گروه $S_2 \times \mathbb{Z}_5$ چند زیرگروه ماکسیمال دارد؟

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۴

(۴) ۶

۲۶- تعداد همریختی‌ها از گروه دوری مرتبه ۶۰ به گروه دوری مرتبه ۴۵ چندتا است؟

(۱) ۵

(۲) ۱۵

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

۲۷- گروه آبلی $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}$ با کدام یک از گروه‌های زیر یکریخت است؟

(۱) $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_9$ (۲) $\mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_6$ (۳) $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_6$ (۴) $\mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5$

۲۸- فرض کنید N زیرگروهی نرمال از گروه غیرآبلی G باشد به طوری که N یک گروه ساده است (یعنی N هیچ زیرگروه نرمال محض غیربدیهی ندارد). در این صورت اگر $\frac{G}{N}$ آبلی باشد آنگاه:

(۱) $G' = N$ (۲) $G' \cap N = 1$ (۳) $Z(G) = N$ (۴) $Z(G) \cap N = 1$

۲۹ - تعداد جایگشت‌های S_7 که حداقل شامل یک دور به طول ۳ اند چند است؟

(۱) ۱۲۴۰

(۲) ۳۵۰

(۳) ۱۶۸۰

(۴) ۸۴۰

۳۰ - فرض کنید F یک میدان و I یک ایده‌آل ناصفر $F[x]$ است. در این صورت کدامیک از گزاره‌های زیر با سایر گزاره‌ها معادل نیست؟

(۱) I یک ایده‌آل اول است.(۲) حلقه خارج قسمتی $\frac{F[x]}{I}$ یک میدان است.(۳) I یک ایده‌آل ماکسیمال (بیشین) است.(۴) حلقه خارج قسمتی $\frac{F[x]}{I}$ یک دامنه درست (حوزه صحیح) متناهی است.

۳۱ - فرض کنید p یک عدد اول است و ایده‌آل‌های $I = p\mathbb{Z}$ و $J = p^2\mathbb{Z}$ از \mathbb{Z} را در نظر بگیرید. در این صورت حلقه $\frac{I}{J}$ دارای کدام خاصیت زیر است؟

(۱) میدان است.

(۲) با حلقه \mathbb{Z}_{p^2} یکرخت است.

(۳) مقسوم علیه نابدیهی صفر دارد.

(۴) با گروه ضربی \mathbb{Z}_p یکرخت است.

۳۲- حلقه $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}; b, c \in \mathbb{Q} \right\}$ همراه با جمع و ضرب ماتریس‌ها را در نظر بگیرید. فرض کنید $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Q} \right\}$ و $J = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}; c \in \mathbb{Q} \right\}$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $\frac{R}{I}$ با حلقه $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ یکرخت است.

(۲) $\frac{R}{J}$ با حلقه اعداد گویا یکرخت است.

(۳) $\frac{R}{I}$ با حلقه اعداد گویا یکرخت است.

(۴) $\frac{R}{J}$ با حلقه $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ یکرخت است.

۳۳- فرض کنید R حلقه‌ای یک‌دار باشد به قسمی که به ازای هر $x \in R$ داشته باشیم $x^2 = x$. اگر I ایده‌آلی از حلقه R باشد، کدام گزینه با سایرین معادل نیست؟

(۱) $\frac{R}{I} \cong \mathbb{Z}_2$

(۲) به ازای هر ایده‌آل J در R ، $IJ = I \cap J$

(۳) I ایده‌آل اول است.

(۴) I ایده‌آل ماکسیمال است.

۳۴- اگر G یک گروه و $N \triangleleft G$ و $\frac{G}{N}$ دارای زیرگروهی از اندیس n باشد آنگاه G دارای زیرگروه H از اندیس زیر است:

(۱) n

(۲) $n!$

(۳) $2n$

(۴) $\frac{1}{2}n!$

۳۵- فرض کنید U_n مجموعه تمام اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از n و نسبت به n اول است. U_n تحت ضرب به پیمانه n تشکیل یک گروه می‌دهد. در این صورت کدام یک از گروه‌های زیر دوری نیست؟

(۱) U_9

(۲) U_{25}

(۳) U_{20}

(۴) U_{27}

۳۶- کدام گزینه در مورد گروه متناوب روی ۴ حرف، یعنی A_4 ، صحیح است؟

(۱) تمام زیرگروه‌های سره آن آبلی‌اند.

(۲) تمام زیرگروه‌های سره و نرمال آن دوری‌اند.

(۳) تمام اعضای مرتبه ۳ در این گروه با یکدیگر جابجا می‌شوند.

(۴) هیچ زیرگروه نرمال محض غیربدیهی ندارد.

۳۷- اگر X یک زیر مجموعه متناهی از گروه جمعی Q با حداقل دو عضو باشد آنگاه زیرگروه تولید شده توسط X دارای کدام خاصیت زیر است؟

(۱) حاصلضرب مستقیم دو گروه دوری نابدیهی که یکی از آنها متناهی است.

(۲) دوری متناهی است.

(۳) حاصلضرب مستقیم دو گروه دوری نابدیهی است.

(۴) دوری نامتناهی است.

۳۸- فرض کنید p و q اعداد اول متمایز و G یک گروه آبلی مرتبه pq است. تعداد مولدهای گروه G چند است؟

(۱) $(p-1)q$

(۲) $(p+1)(q+1)$

(۳) $p(q-1)$

(۴) $(p-1)(q-1)$

۳۹- فرض کنید G گروهی متناهی باشد و N تنها زیرگروه از مرتبه m در گروه G باشد. فرض کنید $(m, |G'|) = 1$. در این صورت کدام گزینه در مورد N نادرست است؟

(۱) N آبلی است.

(۲) $\forall g \in N : C_G(g) \subseteq N$

(۳) $N \subseteq Z(G)$

(۴) اگر $g \in N$ ، آنگاه کلاس تزویجی g در گروه G کاملاً در N قرار دارد.

۴۰- فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار است و $\{0\}$ یک ایده آل اول R است. در این صورت:

(۱) R تنها یک ایده آل اول ناصفر دارد.

(۲) تعداد عناصر R عددی اول است.

(۳) R دارای مقسوم علیه صفر نابدیهی است.

(۴) R یک دامنه درست (حوزه صحیح) است.

آنالیز ریاضی (۱)

۴۱- فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در فضای متریک (X, d) باشد، آنگاه:

(۱) دنباله $\{x_n\}$ کراندار است.

(۲) دنباله $\{x_n\}$ همگرا است.

(۳) زیر دنباله‌ای همگرا از $\{x_n\}$ وجود دارد.

(۴) هر زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ از دنباله $\{x_n\}$ همگراست.

۴۲- فرض کنید $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. در این صورت مجموعه نقطه‌های انباشتگی (حدی) A برابر است با:

(۱) مجموعه تهی

(۲) $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

(۳) $\{(0, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

(۴) $\{(0, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{(0, 0)\}$

۴۳- دنباله نامنفی $\{x_n\}$ در \mathbb{R} همگرا است هرگاه:

(۱) $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد.

(۲) $\{x_n\}$ زیر دنباله‌ای همگرا داشته باشد.

(۳) $\{x_n\}$ دنباله‌ای صعودی باشد.

(۴) $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار باشد.

۴۴- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و برای زیر مجموعه $E \subseteq X$ ، E° درون E ، \bar{E} بستار E و E^c متمم E باشد. کدام یک از ویژگی‌های زیر برقرار است؟

(۱) برای هر $E \subseteq X$ ، $\bar{E}^\circ = \bar{E}$

(۲) برای هر $E \subseteq X$ ، $\bar{E} \setminus E^\circ = \bar{E} \cap \bar{E}^c$

(۳) در حالت خاص اگر $X = \mathbb{R}^n$ آنگاه برای هر $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ، $\bar{E} = \bar{E}^\circ$

(۴) برای هر دو مجموعه $A, B \subseteq X$ ، $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$

۴۵- فرض کنید تابع $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته باشد. در این صورت:

PardazeshPub.com

(۱) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ موجود نیست.

(۲) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ برابر است با $+\infty$ یا $-\infty$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود و متناهی است.

(۴) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ موجود و متناهی است.

۴۶- هرگاه $P(x) = x^3 + 7x^2 - 9$ ، آنگاه:

(۱) چند جمله‌ای P فقط یک ریشه حقیقی دارد.

(۲) چند جمله‌ای P فقط دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

(۳) چند جمله‌ای P ریشه حقیقی ندارد.

(۴) چند جمله‌ای P چهار ریشه حقیقی متمایز دارد.

۴۷- اگر $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد آنگاه کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) مجموعه‌ی نقاط پیوستگی f شمارا است.

(۲) مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی f ناشمارا است.

(۳) مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی f متناهی است.

(۴) مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی f شماراست.

----- PardazeshPub.com

۴۸ - کدام گزاره درست است؟

- (۱) در هر فضای متریک مجموعه‌های بسته و کراندار فشرده‌اند.
 (۲) در فضای متریک گسسته مجموعه‌هایی وجود دارند که نه باز هستند و نه بسته.
 (۳) اگر d متریک قدر مطلق و Q مجموعه اعداد گویا باشد مجموعه $\{x \in Q : 3 \leq x^2 \leq 5\}$ در (Q, d) فشرده است.
 (۴) هر زیر مجموعه باز \mathbb{R} اجتماع شمارایی از بازه‌های باز مجزا در \mathbb{R} است.

۴۹ - فرض کنید دنباله توابع $\{f_n\}$ بر بازه بسته $[-1, 1]$ با ضابطه زیر تعریف شود.

$$f_n(x) = nx^{2n}(1 - x^2)$$

اگر $\alpha_n = \sup_{-1 \leq x \leq 1} f_n(x)$ آنگاه α_n برابر است با:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad (۱)$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \quad (۲)$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n}{n+1} \quad (۳)$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \quad (۴)$$

۵۰ - فرض کنید تابع حقیقی f بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(a) \leq f'(b)$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟(۱) f' بر $[a, b]$ صعودی است.(۲) عددی مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد که $f'(c) = 0$ (۳) $[f'(a), f'(b)] \subseteq f'([a, b])$ (۴) $f'([a, b]) \subseteq [f'(a), f'(b)]$

۵۱- فرض کنید f تابع پیوسته دلخواهی از فضای متریک همبند X به فضای متریک Y باشد. در این صورت:

- (۱) $f(X)$ تک عضوی است.
- (۲) اگر $f(X)$ بیش از یک نقطه داشته باشد، ناشماراست.
- (۳) $f(X)$ ممکن است همبند نباشد.
- (۴) $f(X)$ حداکثر شماراست.

۵۲- فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $[a, b]$ باشد به طوری که مشتق آن بجز در تعداد متناهی از نقاط $[a, b]$ مساوی صفر است. در این صورت:

- (۱) تابع f روی $[a, b]$ تابعی ثابت است.
- (۲) ممکن است $f(a) \neq f(b)$ ولی تابع f بر (a, b) ثابت باشد.
- (۳) فقط در تعدادی متناهی از نقاط $[a, b]$ تابع f برابر با یک مقدار ثابت است.
- (۴) تابع f در تعداد متناهی نقطه اکسترمم موضعی بر (a, b) دارد.

۵۳- فرض کنید $a < b$ و $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱) $f([a, b])$ همبند است.
- (۲) اگر f یک به یک باشد $f^{-1} : f([a, b]) \rightarrow [a, b]$ پیوسته است.
- (۳) $f([a, b])$ بازه‌ای (حجره‌ای) n بعدی مانند $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ است.
- (۴) هر دنباله $\{y_k\}$ در $f([a, b])$ دارای زیر دنباله‌ای همگراست.

۵۴ - فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد باشد که به صفر همگراست. کدام یک از گزاره‌های زیر درست نیست؟

$$(۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \text{ همگراست}$$

$$(۲) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ همگراست به شرط آنکه } x \neq 2k\pi.$$

$$(۳) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \text{ به ازای هر } x \in \mathbb{R} \text{ همگراست.}$$

$$(۴) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ همگراست.}$$

۵۵ - کدام گزینه صحیح است؟

(۱) هر زیر مجموعه‌ی کران‌دار فضای \mathbb{R}^k نقطه‌ی حدی در \mathbb{R}^k دارد.

(۲) هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی فضای \mathbb{R}^k نقطه‌ی حدی در \mathbb{R}^k دارد.

(۳) هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی کران‌دار فضای \mathbb{R}^k یک نقطه‌ی حدی در خودش دارد.

(۴) هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی کران‌دار فضای \mathbb{R}^k یک نقطه‌ی حدی در \mathbb{R}^k دارد.

۵۶ - اگر A° درون A و \bar{A} بستار A باشد کدام گزاره نادرست است؟

$$(۱) (A^\circ)^\circ = A^\circ$$

$$(۲) (A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$$

$$(۳) \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$(۴) (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

۵۷ - اگر F مجموعه کانتور باشد کدام گزاره نادرست است؟

(۱) مجموعه F را نمی‌توان به صورت اجتماع شمارش‌پذیر از بازه‌های بسته نوشت.

(۲) مجموعه F دارای هیچ زیر مجموعه باز ناتهی نیست.

(۳) هر نقطه F هم یک نقطه حدی (نقطه انباشتگی) F و هم یک نقطه حدی متمم F است.

(۴) متمم F را نمی‌توان به صورت اجتماع شمارش‌پذیر از بازه‌های باز نوشت.

۵۸ - فرض کنید مجموعه اعداد گویای بازه $[a, b]$ به صورت $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ نمایش داده شده باشد و تابع f روی $[a, b]$ به صورت $f(x) = \sum_{t_n \leq x} \frac{1}{n}$ تعریف شود (یعنی به ازای هر $n, \frac{1}{n}$ وقتی در حاصل جمع سمت راست منظور می شود که $t_n \leq x$ و اگر هیچ t_n ای نباشد که $t_n \leq x$ آنگاه حاصل جمع را صفر تعریف می کنیم). در این صورت مجموعه نقاط پیوستگی f برابر است با:

(۱) مجموعه اعداد اصم بازه $[a, b]$

(۲) مجموعه تهی

(۳) بازه $[a, b]$

(۴) مجموعه اعداد گویای بازه $[a, b]$

۵۹ - هرگاه X مجموعه نامتناهی با متریک گسسته (*discrete*) باشد و A زیر مجموعه ناتهی از X باشد، آنگاه:

(۱) مرز A برابر \bar{A} است.

(۲) مرز A نامتناهی ولی شماراست.

(۳) مرز A تهی است.

(۴) مرز A برابر A است.

۶۰ - فرض کنید تابع f در صفر مشتق پذیر بوده، $f(0) = 0$ و k یک عدد صحیح مثبت باشد. آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (f(x) + f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x}{3}) + \dots + f(\frac{x}{k}))$$
 برابر است با:

(۱) ۰

$$(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}) f'(0) \quad (2)$$

$$(1 + 2 + \dots + k) f'(0) \quad (3)$$

$$\frac{f'(0)}{k} \quad (4)$$

۶۱ - فرض کنید $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد. کدام گزینه درست است؟
 (۱) f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

(۲) اگر $|f|$ بر $[a, b]$ کراندار باشد آنگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

(۳) اگر f بر $[a, b]$ مثبت باشد آنگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

(۴) اگر $|f|$ بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد آنگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

۶۲ - تابع $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را بر $[0, 1]$ در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱) f بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر است و $\int_0^1 f = \sin 1 - \cos 1$

(۲) f بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر است و $\int_0^1 f = \sin 1$

(۳) چون f بر $[0, 1]$ پیوسته نیست لذا بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر نیست.

(۴) گرچه f در هر همسایگی نقطه صفر کراندار است ولی $\int_0^1 f$ موجود نیست.

۶۳ - بستار یکنواخت کدام یک از مجموعه‌های زیر به عنوان گردایه‌ای از توابع بر $[-1, 1]$ ، برابر مجموعه تمام توابع پیوسته حقیقی مقدار بر $[-1, 1]$ است؟

$$\left\{ \sum_{k=0}^n a_k \cos^k x : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (۱)$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \sin^k x : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (۲)$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \cos^k x : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (۳)$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^n a_k \sin^k x : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (۴)$$

۶۴ - برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $f_n : Q \rightarrow [0, 1]$ مفروض است، که در آن Q مجموعه اعداد گویاست. کدام گزینه درست است؟

(۱) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f_n}{n}$ به طور نقطه‌ای همگراست.

(۲) هر زیر دنباله‌ای از $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دارای زیر دنباله‌ای به طور نقطه‌ای همگراست.

(۳) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دارای زیر دنباله‌ای به طور یکنواخت همگراست.

(۴) مثالهایی وجود دارد که در آن دنباله $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ هیچ زیر دنباله به طور نقطه‌ای همگرا ندارد.

۶۵ - فرض کنید تابع حقیقی g بر \mathbb{R} پیوسته باشد و $g(1) = 3$ و $\int_0^1 g(t) dt = 2$ و $f(x) = \frac{1}{4} \int_0^x (x-t)^2 g(t) dt$ در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $f''(1) = 0$

(۲) $f^{(3)}(1) = 3$

(۳) $f^{(3)}(1) = 0$

(۴) $f''(1) = 5$

۶۶ - فرض کنید f بر $[a, b]$ تابعی کراندار باشد. در این صورت:

(۱) تابع f ممکن است انتگرالپذیر باشد ولی مجموعه نقاط ناپیوستگی آن ناشمارا باشد.

(۲) f انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر مجموعه نقاط ناپیوستگی f متناهی باشد.

(۳) پیوستگی f معادل انتگرالپذیری آن است.

(۴) f انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر مجموعه نقاط ناپیوستگی f حداکثر شمارش‌پذیر باشد.

۶۷- فرض کنیم $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. کدام گزینه معادل انتگرال پذیری ریمان تابع f است؟

- (۱) فشردگی نمودار f
- (۲) تجزیه f به صورت تفاضل دو تابع صعودی
- (۳) همبندی نمودار f
- (۴) برای هر $\epsilon > 0$ تعداد متناهی مستطیل وجود دارد که مجموع مساحت‌های آنها از ϵ کوچکتر و نمودار f را دربردارد.

۶۸- تابع $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4$ با ضابطه $\gamma(x) = (1, x, \frac{x^2}{\sqrt{3}}, \frac{x^2}{3})$ مفروض است. در این صورت طول خم γ برابر است با:

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{4}{3}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{3}{2}$

۶۹- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}$ مفروض است. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- (۱) سری تنها به ازای $x = 0$ همگراست.
- (۲) سری بر هیچ بازه‌ای همگرای یکنواخت نیست ولی نقطه به نقطه همگراست.
- (۳) سری بر مجموعه اعداد حقیقی همگرای یکنواخت است.
- (۴) بازه همگرایی این سری $(-1, 1)$ است و بر این بازه همگرایی یکنواخت است.

۷۰- هرگاه $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی صعودی و $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی کراندار باشند آنگاه:

$$\int_a^b (f - g) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha - \int_a^b g d\alpha \quad (۱)$$

$$\int_a^b (f - g) d\alpha \geq \int_a^b f d\alpha - \int_a^b g d\alpha \quad (۲)$$

$$\int_a^b (f + g) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha \quad (۳)$$

$$\int_a^b (f + g) d\alpha \geq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha \quad (۴)$$

۷۱- کدام تساوی به ازای هر $x \in [-\pi, \pi]$ برقرار است؟

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (۱)$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (۲)$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \quad (۳)$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \quad (۴)$$

۷۲ - فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار بر $[0, 1]$ باشد و به ازای هر n تابع $F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت کراندار است. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)x^n$:

- (۱) بر $[0, 1]$ نقطه به نقطه همگراست.
- (۲) بر $[0, 1]$ نقطه به نقطه همگراست و مجموع سری در $(0, 1)$ پیوسته است.
- (۳) بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.
- (۴) به ازای هر $0 < \delta < 1$ بر $[0, 1 - \delta]$ همگرای یکنواخت است.

۷۳ - انتگرال $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ برای چه مقادیری از p و q همگرا می‌باشد؟

- (۱) برای $p > -1$
- (۲) برای $p, q > -1$
- (۳) برای $q > -1$
- (۴) برای $p + q > -1$

۷۴ - فرض کنید $\{r_n\}$ دنباله تمام اعداد گویای بازه $[-1, 1]$ باشد. دنباله $\{f_n\}$ را بر $[-1, 1]$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

فرض کنید f تابع حدی دنباله $\{f_n\}$ باشد. در این صورت:

- (۱) تابع f بر $[-1, 1]$ انتگرال پذیر ریمان است.
- (۲) به ازای هر n تابع f_n در صفر مشتق پذیر است و $f'(0)$ نیز موجود است.
- (۳) به ازای هر n تابع f_n در صفر پیوسته است ولی مشتق ندارد.
- (۴) به ازای هر n تابع f_n در صفر مشتق پذیر است ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۷۵- هرگاه φ تابع پیوسته روی $[0, 1]$ و $f_n(x) = x^n \varphi(x)$ ، آنگاه دنباله $\{f_n\}$ به طور یکنواخت همگراست اگر و تنها اگر:

(۱) $\varphi(1) = 0$

(۲) برای هر $x \in [0, 1]$ ، $\varphi(x) = 1$

(۳) $\varphi(1) = 1$

(۴) برای هر $x \in [0, 1]$ ، $\varphi(x) = x - 1$

۷۶- برای دنباله توابع $f_n(x) = n \sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2}$ کدام گزینه برقرار است؟

(۱) این دنباله همگرا نیست.

(۲) این دنباله به ازای هر $a > 0$ بر بازه $[0, a]$ به طور نقطه‌ای به یک تابع ناپیوسته همگرا است.

(۳) این دنباله به ازای هر $a > 0$ بر بازه $[0, a]$ همگرایی یکنواخت است.

(۴) این دنباله به ازای هر $a > 0$ بر بازه $[0, a]$ به طور نقطه‌ای به یک تابع بیکران همگرا است.

۷۷- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} (x - x_0)^{(2n+1)!}$ به ازای $a \neq 0$ برابر است با:

(۱) ۰

(۲) $\frac{1}{|a|}$

(۳) ۱

(۴) $|a|$

۷۸- فرض کنید $f(x)$ بر \mathbb{R} پیوسته باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(n+x)dx$ موجود و برابر a باشد. مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx)dx$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) $f(0)$ (۳) a (۴) $f(1)$

۷۹- فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ تابعی پیوسته و M ماکسیمم مقدار آن بر $[a, b]$ و α بر $[a, b]$ صعودی باشد. در این صورت:

(۱) اگر α اکیداً صعودی باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n d\alpha \right)^{\frac{1}{n}} = M$

(۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n d\alpha \right)^{\frac{1}{n}} < M$

(۳) اگر α تابعی پیوسته باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n d\alpha \right)^{\frac{1}{n}} = M$

(۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n d\alpha \right)^{\frac{1}{n}} = M$

۸۰- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n}$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

(۱) این سری بر $[-1, 1]$ همگرایی یکنواخت است.

(۲) این سری بر بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ همگرا است.

(۳) این سری بر $[-1, 1]$ واگرا است.

(۴) همگرایی این سری بر $[-1, 1]$ نقطه به نقطه است ولی این همگرایی یکنواخت نیست.

آنالیز عددی

۸۱- بسط عدد $\frac{2}{11}$ در مبنای ۴ کدام است؟

(۱) 0.02332 (۲) 0.02322 (۳) 0.02322 (۴) 0.02332

۸۲- اگر a و b به ترتیب تقریب‌هایی از اعداد A و B باشند و ab را تقریبی از AB در نظر بگیریم، در چه صورت کران بالای خطای مطلق ab یعنی $|AB - ab|$ کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{4}$ است؟

$$(۱) \quad |AB| \leq \frac{1}{4} \text{ یا } |ab| \leq \frac{1}{4}$$

$$(۲) \quad |a| \leq \frac{1}{4} \text{ یا } |b| \leq \frac{1}{4}$$

$$(۳) \quad |a|, |b|, |A|, |B| \leq \frac{1}{4}$$

$$(۴) \quad |AB| \leq \frac{1}{4} \text{ و } |ab| \leq \frac{1}{4}$$

۸۳- برای محاسبه $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k$ وقتی $0 < x < 1$ و n خیلی بزرگ است، در محاسبه با یک وسیله محاسباتی کدام یک از روابط زیر مقدار دقیق‌تری به دست می‌دهد؟

$$(۱) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k$$

$$(۲) \quad \sum_{k=1}^n x^{n+2-2k} - \sum_{k=1}^n x^{n+1-2k}$$

$$(۳) \quad \sum_{k=1}^n x^{2k} - \sum_{k=1}^n x^{2k-1}$$

$$(۴) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^{n+1-k}$$

۸۴- برای محاسبه $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$ رابطه تکراری همگرا به x با بیشترین مرتبه همگرایی مجانبی را انتخاب کنید.

$$(۱) \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n - 1}$$

$$(۲) \quad x_{n+1} = \frac{2}{2x_n - 1}$$

$$(۳) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{x_n + 2}$$

$$(۴) \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$$

۸۵- فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت و $k > 1$ عددی طبیعی باشد. اگر دنباله $\{x_n\}$ حاصل از فرمول $x_{n+1} = \frac{x_n^k + kax_n}{kx_n^{k-1} + a}$ یک دنباله همگرا به عددی غیرصفر باشد آنگاه دارای مرتبه همگرایی حداقل ۲ است اگر مقدار k برابر باشد با.....

(۱) صفر یا ۳

(۲) ۳

(۳) $\frac{\ln a + \ln(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)}{\ln(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)}$

(۴) ۲

۸۶- می‌دانیم $\alpha = 0$ یک ریشه‌ی معادله‌ی $2 \cos x - 2 + x^2 = 0$ است. مرتبه (order of multiplicity) این ریشه کدام است؟

(۱) یک

(۲) چهار

(۳) سه

(۴) دو

۸۷- رابطه تکراری $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ روش نیوتن برای محاسبه $\frac{1}{a}$ که $a > 0$ را نشان می‌دهد. x از کدام بازه اختیار شود تا دنباله $\{x_n\}$ همگرا باشد؟

(۱) $(0, \frac{2}{a})$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ (۴) $(\frac{1}{2a}, \frac{3}{2a})$

۸۸- فرض کنید $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$ و $f''(\alpha) \neq 0$. مرتبه‌ی همگرایی (مجانبی) دنباله زیر، در صورت همگرایی، کدام است؟

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

(۱) حداقل سه

(۲) یک

(۳) دو

(۴) حداقل دو

۸۹- اگر دنباله $\{x_n\}_{n=0}$ با ضابطه‌ی $x_{n+1} = g(x_n)$ دارای مرتبه همگرایی دو باشد مرتبه همگرایی دنباله $x_{n+1} = g(g(x_n))$ کدام

است؟ $(g \in C^2(\mathbb{R}))$

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۴

(۴) ۳

۹۰- تخمین $f(x) = \sqrt{x}$ در بازه $[1, 2]$ با توابع خطی تکه‌ای مدنظر است. تعداد زیربازه‌های مساوی در بازه $[1, 2]$ حداقل چقدر باشد

تا کران بالای خطای برشی تخمین در این بازه کمتر از 5×10^{-5} باشد؟

(۱) ۲۵

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

۹۱ - در پیاده سازی روش حذفی گاوس، برای حل عددی دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ ، کدام کار(ها) به پایداری روش می افزاید؟

PardazeshPub.com

(۱) وارون ماتریس ضرایب محاسبه شود.

(۲) کوچکترین مقدار ممکن برای عنصر محوری اختیار شود.

(۳) عناصر محوری اعداد مثبت اختیار شوند.

(۴) محورگیری سطری (جزئی) صورت گیرد.

۹۲ - درجه چند جمله ای درونیاب تابع جدولی زیر کدام است؟

x_i	-۱	۰	$\frac{1}{4}$	۱	۲
$f(x_i)$	-۲	۱	۱	۴	۳۱

۱ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

۹۳ - در صورتی که $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ چند جمله ای درونیاب تابع $f(x) = x^{n+1}$ در نقاط متمایز x_0, x_1, \dots, x_n باشد آنگاه تحت چه شرطی $a_n = 0$ است؟

$$\sum_{i=0}^n x_i = 0 \quad (۱)$$

$$\sum_{i=0}^n x_i + \prod_{i=0}^n x_i = 0 \quad (۲)$$

$$\sum_{i=0}^n x_i - \prod_{i=0}^n x_i = 0 \quad (۳)$$

(۴) یکی از گره ها صفر باشد.

PardazeshPub.com

۹۴ - می‌دانیم که $f'(x) = \frac{f(x + \frac{h}{p}) - f(x - \frac{h}{p})}{h} + \alpha h^p$ مقادیر α و p کدام است؟

(۱) $p = 1$ و $\alpha = -\frac{1}{12}$

(۲) $p = 2$ و $\alpha = -\frac{1}{24}$

(۳) $p = 2$ و $\alpha = \frac{1}{24}$

(۴) $p = 3$ و $\alpha = \frac{1}{12}$

۹۵ - در یک قاعده انتگرال‌گیری عددی از نوع نیوتن - کوتز (Newton - Cotes) با نقاط متساوی‌فاصله، مجموع وزن‌های قاعده کدام است؟

(۱) تعداد نقاط قاعده

(۲) نصف طول بازه انتگرال‌گیری

(۳) نصف تعداد نقاط قاعده

(۴) طول بازه انتگرال‌گیری

۹۶ - فرض کنید $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \simeq hf(x_{i+1})$ که $h = x_{i+1} - x_i$ مقدار کدام یک از انتگرال‌ها را نمی‌توان با استفاده از این قاعده تخمین زد؟

(۱) $\int_{0.5}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(۲) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(۳) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(۴) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۹۷- فرض کنید $f(x) = \sin x \cos x$. از میان سه روش انتگرال گیری عددی ذوزنقه‌ای، نقطه میانی و سیمسون (با نقاط متساوی الفاصله)، کدام روش (روشها) مقدار دقیق $\int_{-1}^1 f(x) dx$ را به دست می دهند؟

(۱) قاعده‌ی نقطه‌ی میانی

(۲) هر سه قاعده‌ی انتگرال گیری

(۳) قاعده‌ی ذوزنقه‌ای و نقطه‌ی میانی

(۴) قاعده‌ی سیمسون و ذوزنقه‌ای

۹۸- اگر $T(h)$ با خطای برشی مرتبه h^2 انتگرال $I = \int_a^b f(x) dx$ را تقریب کند و بدانیم ثابت‌های $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ وجود دارند به طوری که $I = T(h) + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^3 + \dots$ آنگاه مقدار کدام یک از عبارات زیر I را با خطای برشی $O(h^1)$ تقریب می کند؟

(۱) $\frac{1}{15}(-T(h) + 16T(\frac{h}{4}))$

(۲) $\frac{1}{16}(T(h) - 15T(\frac{h}{4}))$

(۳) $\frac{1}{4}(T(h) - 3T(\frac{h}{4}))$

(۴) $\frac{1}{3}(T(h) - 4T(\frac{h}{4}))$

۹۹- برای معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = 1 \end{cases}$ از روش زیر استفاده می کنیم

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(f_n + f_{n+1})$$

هرگاه $0 < \frac{Ah}{4} < 1$ و $x_n = nh$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ کدام است؟

(۱) e^{x_0}

(۲) e^{2h}

(۳) e^{4x_0}

(۴) e^4

۱۰۰ - معادله دیفرانسیل $y' = -y$ ، $y(0) = 1$ ، $0 \leq x \leq 0.1$ را با روش اویلر حل کنید. خطای مطلق آن کدام است؟
(می‌دانیم که جواب دقیق این معادله دیفرانسیل در $x = 0.1$ تا سه رقم اعشار برابر است با ۰/۹۰۵)

(۱) 7×10^{-2}

(۲) 10^{-2}

(۳) 3×10^{-2}

(۴) 5×10^{-2}

جبر خطی

۱۰۱ - فرض کنید V و W فضاهای برداری متناهی بعد روی میدان F و $f: V \rightarrow W$ ، $g: W \rightarrow V$ تبدیلات خطی ناصفری باشند که $gof = 0$ و $\dim V - \dim W = n(f) - r(g)$ که $n(f)$ رتبه f و $r(g)$ رتبه g است، در این صورت:

(۱) $\ker g \subsetneq \operatorname{Im} f$

(۲) $\operatorname{Im} f \subsetneq \ker g$

(۳) $\operatorname{Im} f = \ker g$

(۴) $\operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$

۱۰۲ - فرض کنید A ، B ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند به طوری که $A^t = A$ و $B^t = -B$ کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $A^p B^q A^p$ متقارن است اگر q زوج باشد.

(۲) $AB - BA$ متقارن است.

(۳) $AB + BA$ پاد متقارن است.

(۴) $B^p A^q B^r$ پاد متقارن است هرگاه p و r زوج باشند.

۱۰۳ - فرض کنید γ بردار ناصفری در \mathbb{R}^2 باشد و تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت $T(x) = x \wedge \gamma$ تعریف می‌کنیم که $x \wedge \gamma$ ضرب خارجی دو بردار x و γ است. رتبه T کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) ۰

(۴) ۳

۱۰۴ - هرگاه A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times p$ روی میدان F باشند و منظور از r_A رتبه A باشد و $AB = 0$ آنگاه کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(۱) $r_A + r_B > n$ (۲) $r_A + r_B \leq n$ (۳) $r_A + r_B < n$ (۴) $r_A + r_B \geq n$

۱۰۵ - فرض کنید T تقارن در صفحه نسبت به نقطه $|A|_2$ است. ماتریس T نسبت به پایه استاندارد کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

PardazeshPub.com

۱۰۶ - رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) ۹

۱۰۷ - بعد فضای جواب دستگاه $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) ۰

(۴) ۳

۱۰۸ - فرض کنید V یک فضای برداری ۴ بعدی روی میدان ۵ عضوی باشد و W زیرفضایی ۲ بعدی از V است. چند پایه متفاوت برای W وجود دارد؟

(۲) ۴۸۰

(۱) ۵۵۲

(۴) ۵۷۶

(۳) ۴۵۶

۱۰۹ - اگر V یک فضای برداری ۳ بعدی روی میدان ۳ عضوی F باشد. آنگاه تعداد زیرفضاهای متمایز یک بعدی V برابر است با:

(۲) ۱۳

(۱) ۲۷

(۴) ۸۱

(۳) ۳

PardazeshPub.com

۱۱۰- فرض کنید V فضای برداری تمام چند جمله‌ایهای از درجه حداکثر ۳ با ضرایب اعداد حقیقی باشد. تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ را به صورت $T(f(x)) = xf'(x) + f(x)$ تعریف می‌کنیم. پایه مرتب $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ را برای V در نظر گرفته و M را ماتریس نمایش T نسبت به پایه B بگیرید. در این صورت $tr(M)$ (مجموع عناصر روی قطر اصلی M) کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۱۰

۱۱۱- اگر T تقارن در صفحه نسبت به خط به معادله $2x - y = -2$ باشد آنگاه یک مقدار ویژه T عبارتست از:

(۱) -۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۲

(۴) -۲

۱۱۲- فرض کنید $V \neq 0$ یک فضای برداری بر میدان F باشد به طوری که دارای فقط یک پایه است در این صورت مشخصه میدان F کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) $\text{char} F \neq 5$

(۴) ۰

۱۱۳- فرض کنید $B = \{b_1, b_2\}$ و $C = \{c_1, c_2\}$ پایه‌های مرتبی برای \mathbb{R}^2 اند. اگر $b_1 = 3c_1 + 2c_2$ و $b_2 = 4c_1 + 3c_2$ آنگاه ماتریس

تعویض پایه از C به B کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۱۴- فرض کنید $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$ یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد. بعد V به عنوان یک فضای برداری بر میدان اعداد حقیقی چند است؟

(1) ۳

(2) ۴

(3) ۲

(4) ۶

۱۱۵- اگر A یک ماتریس $n \times n$ و λ^2 یک مقدار ویژه ماتریس A^2 باشد آنگاه:

(1) $\pm \lambda$ یک مقدار ویژه A است.

(2) λ یک مقدار ویژه A است.

(3) λ^4 یک مقدار ویژه A^4 است.

(4) λ^2 یک مقدار ویژه A^2 است.

۱۱۶- اگر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ چهار مقادیر ویژه تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ باشند که $T(x, y, z, t) = (x + t, y, z, x)$ و λ_i ها در میدان اعداد مختلط باشند آنگاه مقدار $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \lambda_i \lambda_j$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) ۰

(۴) ۳

۱۱۷- فرض کنید V یک فضای برداری ۳ بعدی باشد و $T: V \rightarrow V$ به شکل زیر تعریف شده است:

$$T(a, b, c) = (a + b + c, a + b + c, a + b + c)$$

تبدیل خطی T چند مقدار ویژه متمایز دارد؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) ۰

(۴) ۳

۱۱۸- اگر A یک ماتریس 5×5 با رتبه ۲ و فقط یک مقدار ویژه ناصفر c داشته باشد آنگاه چند جمله‌ای مشخصه A عبارتست از:

$$f(x) = (x - c)^2 x^2 \quad (۱)$$

$$f(x) = (x - c)^4 x^2 \quad (۲)$$

$$f(x) = (x - c)^2 x^3 \quad (۳)$$

$$f(x) = (x - c)^4 x \quad (۴)$$

PardazeshPub.com

۱۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مطلوب است محاسبه A^{100} .

$$(1) \begin{bmatrix} 2(3^{100} + 2^{100}) & 2^{100} - 3^{100} \\ 3^{100} - 2^{100} & 2^{100} + 3^{100} \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2(3^{100} - 2^{100}) & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ 3^{100} - 2^{100} & 2^{100} + 3^{99} \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2(3^{101} + 2^{100}) & 2^{101} - 3^{100} \\ 2(3^{100} - 2^{99}) & 4^{100} + 3^{99} \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2(3^{100} - 2^{99}) & 2(2^{100} - 3^{100}) \\ 3^{100} - 2^{100} & 2^{101} - 3^{100} \end{bmatrix}$$

۱۲۰- فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $T(x, y, z) = (x - y, y + z, 2x - y - z, -x + y + 2z)$ تعریف شده است. در این صورت رتبه T برابر است با:

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) ۴

PardazeshPub.com

PardazeshPub.com

کتابخانه
دانشگاه
پدافند
و امنیت
پدافند
و امنیت

PardazeshPub.com