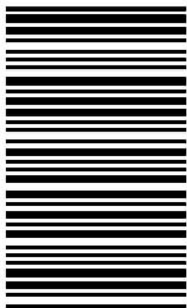


کد کنترل

461

E



461E

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۴۰۱

صبح چهارشنبه

۱۴۰۱/۰۲/۲۸



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

علوم کامپیوتر (کد ۱۲۰۹)

زمان پاسخ‌گویی: ۲۴۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۳۵

جدول مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۲+۱)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۳۵	۳۱	۶۵
۳	ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه	۳۰	۶۶	۹۵
۴	مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها	۲۰	۹۶	۱۱۵
۵	ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات	۲۰	۱۱۶	۱۳۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤال‌ها به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای همه اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفان برابر مقررات رفتار می‌شود.

* متقاضی گرامی، وارد نکردن مشخصات و امضا در کادر زیر، به منزله غیبت و حضور نداشتن در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤال‌ها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤال‌ها و پایین پاسخنامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- Growing older and more decrepit appeared to be an ----- and necessary part of being human.
1) inevitable 2) intangible 3) unforeseeable 4) unsentimental
- 2- I don't really think I'd have the ----- to finish a marathon!
1) concern 2) candor 3) endurance 4) autonomy
- 3- Her marriage started to improve once her husband finally ----- he had an anger problem and began to take counseling.
1) identified 2) emerged 3) hesitated 4) acknowledged
- 4- Society is an interdependent system that ----- widespread cooperation to function.
1) proceeds 2) requires 3) fascinates 4) conveys
- 5- Our blue planet is a ----- . Life depends on water, yet in its natural form, the water in the oceans will not sustain us because we cannot drink salt water.
1) refuge 2) remedy 3) paradox 4) vacillation
- 6- I thought I was buying a/an ----- native Indian carving, but discovered later that it was machine-made.
1) genuine 2) definitive 3) secretive 4) artificial
- 7- The entrepreneur had a well-deserved reputation for -----, having accurately anticipated many changes unforeseen by established business leaders.
1) modesty 2) hindsight 3) prescience 4) extroversion
- 8- Studies of longevity among turtles are sometimes ----- by the fact that the subjects live so long that researchers retire before the studies can be completed.
1) stabilized 2) hampered 3) diversified 4) verified
- 9- Kevlar is a ----- new material which is used for everything from airplane wings, to bullet-proof vests, to hockey sticks.
1) prescriptive 2) versatile 3) dormant 4) derivative
- 10- If exploitation of the planet's resources continues as at present, then the lifestyle we currently enjoy ----- the risk of causing significant damage to the world.
1) proposes 2) puts 3) shapes 4) runs

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Scientists and philosophers have been grappling with the relationship between language and thought for centuries. There have always been (11) ----- that our picture of the Universe depends on our native tongue. Since the 1960s, however, (12) ----- the ascent of thinkers like Noam Chomsky, and a host of cognitive scientists, (13) ----- that linguistic differences don't really matter, (14) ----- language is a universal human trait, and that our ability to talk to one another owes more to our shared genetics (15) ----- . But now the pendulum is beginning to swing the other way as psychologists re-examine the question.

- | | | |
|-----|--------------------------------|---------------------------------|
| 11- | 1) that they argue | 2) those who argue |
| | 3) an argument by those | 4) arguing those who |
| 12- | 1) with | 2) for |
| | 3) by | 4) in |
| 13- | 1) whose consensus | 2) who has the consensus |
| | 3) the consensus has been | 4) is the consensus |
| 14- | 1) a | 2) the |
| | 3) what | 4) that |
| 15- | 1) and our cultures vary | 2) than to our varying cultures |
| | 3) than our cultures that vary | 4) as to our varying cultures |

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE I:

There are two kinds of secondary memory technologies: sequential and random-access or direct-access. An example of the former is a strip of plastic, usually half an inch wide, coated on one side with metal oxide that can be magnetized. Tapes come in varying lengths of 250, 600 1200, and 2400 feet and are usually kept off-line in libraries. When the information stored on tape is needed, an operator mounts the tape onto a tape drive which has a fixed reel and an empty hub. The tape is then threaded through the machine in a way similar to that of threading a tape through a tape recorder.

To mark the beginning and the end of a tape, small pieces of silver foil or any other reflective strips called tape-marks are stuck onto the tape. Information is then stored on the tape in magnetized units called bits which are similar to the bits in internal memory. Vertically, they form patterns such that every nine of them (eight bits of data plus a parity bit, used for error detection) are called a frame. A group of these frames forms a record of information, which may be either long or short. These records are separated from each other by marks called interrecord gaps, and a group of such

logical records forms a physical record known as a block. Blocks, in turn, are organized as files, which are separated from each other by special characters.

How much information is stored on the tape depends on the length of the tape as well as its density. The density is determined by the number of bytes that can be stored on one inch of tape and is measured by bytes per inch or BPI; Some tapes store information at a density of 1600 BPI or even 6250 BPI, which means that, at the latter density, 2400 feet of tape would be needed to store approximately 175 million bytes of information.

Tape drives record information lengthwise in channels or tracks, with one bit per track. Newer models use nine tracks rather than seven as the older models did. In order to store information on a tape, a tape drive is equipped with a set of recording heads, one head per track. One tape drive is distinguished from another by the transfer rate or transfer speed; in other words, by the number of bytes per second a tape capable of transferring from the tape to memory or vice versa. This speed is usually measured by inches per second, or IPS. So, if a tape drive has a transfer speed of 200 IPS, reading from at 6250 BPI density tape is like reading about 15,000 cards in one second!

Tapes are obviously a faster medium than punched cards for accessing information; moreover, they are a convenient way to transfer data from one computer to another, or even from one city to another.

- 16- Which statement expresses the main idea of the passage?
- 1) Tapes are organized in terms of frames, records, blocks, and files.
 - 2) Tapes differ from each other by the transfer rate they have.
 - 3) A tape may not be considered as a good device for storing information.
 - 4) It is easy to transfer information from one computer to another, by means of tapes.
- 17- The storage capacity of a tape is determined by its -----.
- 1) length and density
 - 2) length alone
 - 3) density alone
 - 4) frame structure
- 18- Select the best choice for the meaning of the underlined word “distinguish” in the fourth paragraph.
- 1) mounted
 - 2) underscored
 - 3) glorified
 - 4) differentiated
- 19- A block -----.
- 1) has a shorter capacity than a record
 - 2) is composed of a number of compressed files
 - 3) has a larger capacity than a frame
 - 4) of information is usually wasted at the end of a tape
- 20- ----- to mark the beginning and the end of a tape.
- 1) Frames are used
 - 2) Tracks are formed
 - 3) Magnetic pieces are mounted on a tape
 - 4) Reflective pieces are stuck onto a tape

PASSAGE 2:

The four different bases that have been employed in commercially available computers are binary, octal, decimal, and hexadecimal.

It is important to distinguish between the syntax, the internal format of a floating-point datum, and the semantics, the associated interpretation or meaning. The term *significand* refers to the syntax that is interpreted as the *mantissa*; the *exrad* is interpreted as the *exponent*. Together, the mantissa and exponent define the value. First we will consider the significand. In all cases that have been commercially available, the sign is explicitly given as a bit toward the left of the floating-point, datum. In most cases this is the same bit employed for the sign bit of an integer datum. Two situations are employed in the placement of the assumed radix point of the significand: to the extreme right and to the extreme left. If the radix point is on the right, it is apparent that the significand is an integral number. Presumably the significand would be shifted right (with an appropriate adjustment of the value of the exrad) until the rightmost base element (1 bit for binary, 3 for octal, 4 for both decimal and hexadecimal) was nonzero. Although exact conversions of external base 10 values to internal base 2 values, and vice versa, exist for integral values, the placement of the radix point on the right does not result in exact conversion accuracy, even for those values which can be entirely contained in the space provided for the significand, because of the effects of multiplying the also converted exponent as a power of the base. For larger values, an approximation is necessary that cannot be less accurate than if the radix point were assumed to be on the left. If the radix point is on the left, the significand is necessarily a fraction, and exact conversions from external base 10 values to internal base 2 values, and vice versa, are not possible.

Thus all significand values are approximations regardless of magnitude, although values beyond the capacity of the significand are approximated less accurately than those within. It should be noted that floating-point numbers represented as binary-coded-decimal numbers are not subject to the conversion errors discussed above. The significand is shifted left or right (toward the radix point) with appropriate adjustment of the exrad value, until the leftmost or rightmost element (in terms of the number base of the exrad) is nonzero in a process known as *normalization*. Whereas the maximum magnitude of a floating-point quantity is controlled by the length and coding scheme of the exrad, the precision or accuracy of a quantity is controlled by the effective length of the significand. If the coding scheme of the exrad is binary, the significand will be interpreted as binary, with normalization always resulting in a binary 1 in the position adjacent to the assumed radius point. Thus the effective length of the significand is the physical length. If the coding scheme of the exrad is hexadecimal, the shifting of the significand during normalization will be by 4-bit elements, resulting in the possibility of three binary zeros adjacent to the assumed radix point after normalization. Thus the assured effective length of the hexadecimal significand is 3 bits less than the physical length.

- 21- The value a floating point number is determined by the -----.
- | | |
|----------------|---------------------------|
| 1) significand | 2) mantissa and exponent |
| 3) exrad | 4) syntax of the mantissa |
- 22- For an integer significand, the radix point -----.
- 1) is not considered to be appropriate
 - 2) can be placed anywhere within the significand
 - 3) is placed on the left of the significand
 - 4) is placed on the right of the significand

- 23- Normalization of a nongero point number is achieved by -----.
- 1) approximation of the significand
 - 2) adjustment of the exponent
 - 3) conversion of the base of the number
 - 4) removal of the radix point
- 24- Select the best choice for the meaning of the underlined word “magnitude” in the last paragraph.
- 1) size
 - 2) importance
 - 3) influence
 - 4) significand
- 25- Conversion of a floating point number represented in a given base to another base -----.
- 1) may incur a loss in its value
 - 2) is always possible with no loss in its value
 - 3) is only possible when the original base is 2
 - 4) is only possible when the original base is a power of 2

PASSAGE 3:

Many of the organizations we discuss are based on the premise that there is a large number of identical, or almost identical, "processors," with each processor connected to a small number of other processors, in a regular pattern. For example, the processors might be the nodes of a complete binary tree, in which case a processor is connected to its two children and its parents, leaves are connected only to their parents and the root is connected only to its children, of course. As another example, the processors might be the nodes of a *d-dimensional* hypercube.

A basic constraint that we try to meet is that processors should not know their positions in such a tree, hypercube, or other pattern, although some exceptions are necessary; for example, we shall normally expect the root processor in a tree to know it is the root. The reason for this constraint is so the processor we design for a certain application can be connected in arbitrarily large networks, such as trees of arbitrary depth, thus allowing us to solve progressively larger instances of the problem as the size of networks that are feasible to build grows. Fortunately, common interconnection patterns usually allow the processors to deduce where they are. For example, we can write a program that enables a tree network to count the number of nodes. whereupon the root can pass down enough information so that each leaf can discover how many leaves there are to its left.

Each processor is a small computer with limited storage capacity; we shall discuss the details of such a processor shortly. A large number of these processors may be brought to bear on a single problem, for example, sorting integers. Since the "sorting problem" is really a family of problems, parametrized by the number of elements, n to be sorted and by the number of bits k used to represent each element we actually are discussing a family of circuits, one for each n and k .

Since the size of the circuit that can fit on one chip is limited, when we consider such a family of circuits, we should consider both designs for a single and designs for networks of chips, where the pattern of interconnections among processors includes not only the pattern on a chip but the pattern of interconnections among chips. The major problem with generalizing interconnection patterns from a single chip to many chips is that the number of pads that can appear on any one chip is limited by the

number of (real) wires that can be attached physically to a chip (about 100 pads is the limit in the early 1980's).

Fortunately, good designs for a single chip often limit the number of wires leaving any particular rectangle on the chip. Thus, breaking a design into squares or rectangles making each a single chip, and replacing the wires of the layout that cross a boundary by pads and real wires, is often a successful way to generalize a design from a single chip to many chips.

- 26- Consider a number of processors organized as (1) nodes of a complete binary tree and (2) nodes of a d-dimensional hypercube and choose the correct choice.
- 1) (1) has a regular pattern but (2) does not.
 - 2) (2) has a regular pattern but (1) does not.
 - 3) Both may have a regular pattern.
 - 4) Neither of the two organizations may have a regular pattern.
- 27- In a processor organized as a tree we expect that ----- in the tree.
- 1) only the root processor to know its position
 - 2) all the node processors to know their positions
 - 3) none of the node processors to know its position
 - 4) some node processors to know their positions
- 28- Select the best choice for the meaning of the underlined word “deduce” in the second paragraph.
- 1) go away
 - 2) lead down
 - 3) alarm
 - 4) assume
- 29- With common interconnection patterns within the processor networks it is -----.
- 1) possible to find out processor locations
 - 2) impossible for processors to know their locations
 - 3) readily known where the processors are located
 - 4) hard to deduce processor locations
- 30- Generalization of a design from a single chip to many chips -----.
- 1) is not possible
 - 2) is not considered to be a good design
 - 3) breaks down the layout of the network
 - 4) turns to be possible due to the number of wires leaving any particular rectangle on the single chip being limited

دروس پایه (ریاضی عمومی (۲ و ۱)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱- انحناي خم منحنی قطبی $r = 2 \cos(\theta - \frac{\pi}{6})$ در $\theta = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

۳۲- مساحت ناحیه محصور به محور x ها، منحنی $x = \cosh t$ ، $y = \sinh t$ و نیم خط واصل از مبدأ مختصات به نقطه $(\cosh 2, \sinh 2)$ درباره $t \in [0, 2]$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{4} \sinh 4$$

$$(2) 1$$

$$(3) 2$$

$$(4) \frac{1}{4} \sinh 4 - 1$$

۳۳- نوع دقیق سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\pi}{\ln(\ln n)}$ ، کدام است؟

(۲) واگرا

(۱) همگرا

(۴) همگرای مشروط

(۳) همگرای مطلق

۳۴- ضریب x^7 در بسط مکلورن تابع $\int_1^{1+x} \frac{\ln t}{t+1} dt$ ، کدام است؟

$$(1) \frac{1}{49}$$

$$(2) \frac{6}{49}$$

$$(3) \frac{3}{49}$$

$$(4) \frac{1}{7}$$

۳۵- با تغییر متغیر $r = x + 2t$ و $s = x - 2t$ ، شکل ساده شده معادله $u_{tt} = 4u_{xx}$ کدام است؟

$$(1) u_{ss} = u_{rr}$$

$$(2) u_{ss} + u_{rr} = 0$$

$$(3) u_{sr} = u_{rs}$$

$$(4) u_{sr} = 0$$

۳۶- در ناحیه‌ای از صفحه xy ، مقدار دما در نقطه (x, y) با تابع $T(x, y) = x^2 e^{-y}$ بر حسب درجه سانتی‌گراد تعیین می‌شود. آهنگ افزایش T در جهتی که دارای سریع‌ترین افزایش در نقطه $(1, 2)$ باشد، کدام است؟

$$(1) \frac{\sqrt{2}}{e}$$

$$(2) \frac{4}{e}$$

$$(3) \frac{2\sqrt{2}}{e}$$

$$(4) \frac{4\sqrt{2}}{e}$$

۳۷- فرض کنید $\frac{\partial v}{\partial y}$ مقدار $\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$ در نقطه $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{7}{4}$

(۲) $\frac{7}{4}$

(۳) $-\frac{7}{2}$

(۴) $\frac{7}{2}$

۳۸- فرض کنید $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq \ln 2\}$ مقدار $\iint_D e^{x+y} dx dy$ کدام است؟

(۱) $6 \ln 2$

(۲) $2 \ln 2$

(۳) $3 \ln 2$

(۴) $\frac{3 \ln 2}{2}$

۳۹- شار گذرا از سطح بسته محدود به استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحات $z = 1$ و $z = 0$ توسط نیروی

$\vec{F}(x, y, z) = (yx^2 + y + 2 + z^2)\hat{i} + (e^{x^2} - xy^2)\hat{j} + (3 + x)\hat{k}$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) 2π

(۳) 4π

(۴) 6π

۴۰- گشتاور ماند مخروط توپر صلبی با معادله $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - z$ و چگالی حجمی ۲ حول محور z ها، کدام است؟

(۱) $\frac{16\pi}{5}$

(۲) 6π

(۳) $\frac{32\pi}{5}$

(۴) 4π

۴۱- نقیض گزاره زیر کدام است؟

دنباله $\{a_n\}$ اکیداً صعودی است و به عدد a همگرا است.

(۱) $\forall n(a_n < a_{n+1}) \Rightarrow \exists \epsilon \forall N \exists n(n \geq N \wedge |a_n - a| \geq \epsilon)$

(۲) $\forall \epsilon \exists N \forall n(n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon) \Rightarrow \forall n(a_n \geq a_{n+1})$

(۳) $\exists n(a_n \geq a_{n+1}) \wedge \exists \epsilon \forall N \exists n(n \geq N \wedge |a_n - a| \geq \epsilon)$

(۴) $\forall n(a_n \geq a_{n+1}) \Rightarrow \exists \epsilon \forall N \exists n(n \geq N \wedge |a_n - a| \geq \epsilon)$

۴۲- فرض کنید $P = \{(x, y) : y = \sqrt{1-x}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. رابطه S را روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(x, y) S (z, w) \equiv (x - z, y - w) \in P$$

(۱) رابطه هم‌ارزی نیست.

(۲) رابطه هم‌ارزی است و تعداد رده‌های هم‌ارزی آن متناهی است.

(۳) رابطه هم‌ارزی است و تعداد رده‌های هم‌ارزی آن شمارای نامتناهی است.

(۴) رابطه هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی آن به صورت خطوط موازی با P هستند.

۴۳- کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) اگر B خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $A \in B$ ، آنگاه $P(A) \in P(P(B))$.

(ب) برای هر مجموعه دلخواه A ، $UP(A) = A$.

(P نماد مجموعه توانی است.)

(۱) فقط (الف)

(۲) فقط (ب)

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۴۴- برای مجموعه‌های A و B تعریف‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$A \equiv B$: A و B هم عدد (هم‌ارز) هستند، یعنی بین آنها یک دو سویی وجود دارد.

$A < B$: A با زیرمجموعه‌ای از B هم عدد است ولی B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم عدد نیست.

$A \leq B$: A با زیرمجموعه‌ای از B هم عدد است.

فرض کنید C و D مجموعه‌های دلخواه باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $A < B$ آنگاه $A^C < B^C$.

(۲) اگر $A \leq B$ آنگاه $A^C \leq B^C$.

(۳) اگر $A < B$ آنگاه $C^A < C^B$.

(۴) اگر $A \equiv B$ و $C \equiv D$ آنگاه $A \cup C \equiv B \cup D$.

۴۵- فرض کنید $A = (\circ, 1) \cap \mathbb{Q}$ و $B = (0, \circ) \cap \mathbb{Q}$ ، که $\mathbb{Q}$ به ترتیب مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد

گنگ (اصم) است. اگر $F(A)$ و $F(B)$ به ترتیب خانواده تمام زیرمجموعه‌های متناهی A و B باشند، با فرض

پذیرش اصل انتخاب دو گزاره زیر را در نظر می‌گیریم، که در آنها $\equiv$ نماد هم‌عدد (هم‌توان) بودن و $\mathbb{R}$ نمایش

مجموعه اعداد حقیقی است. کدام یک از دو گزاره درست است؟

(الف) $F(A) \equiv \mathbb{Q}$

(ب) $F(B) \equiv \mathbb{R}$

(۱) فقط (الف)

(۲) فقط (ب)

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۴۶- فرض کنید $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ، هرگاه A یک ماتریس وارون پذیر 2×2 باشد و داشته باشیم $A^3 = A^2 B - 3A^2$ ،

A کدام یک از ماتریس‌های زیر است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

۴۷- بردارهای $u_1 = (1, -1, 0)$ ، $u_2 = (1, 1, 0)$ ، $u_3 = (0, 1, 1)$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهند.

مختصات بردار $v = (5, 3, 4)$ نسبت به این پایه کدام است؟

$$(2) [v] = [1, 2, 4]$$

$$(1) [v] = [3, 2, 4]$$

$$(4) [v] = [2, 4, 5]$$

$$(3) [v] = [3, 1, 4]$$

۴۸- فرض کنیم $P_2(\mathbb{R})$ فضای برداری چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲ روی میدان $\mathbb{R}$ باشد و

$T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ با ضابطه $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b) + 2dx + bx^2$ باشد. اگر $B \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ پایه

استاندارد فضای برداری $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ و $\gamma = \{1, x, x^2\} \subseteq P_2(\mathbb{R})$ پایه باشد، آنگاه جمع درایه‌های

ماتریس نمایش T نسبت به این پایه‌ها برابر است با:

$$(1) 7$$

$$(2) 6$$

$$(3) 5$$

$$(4) 4$$

۴۹- فرض کنید a و b مقادیر ویژه ماتریس 2×2 با درایه‌های حقیقی A باشد. اگر $\det(A) = 10$ ، $\text{tr}(A) = 5$ ، در

این صورت $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برابر است با:

$$(1) \frac{1}{5}$$

$$(2) \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{5}{6}$$

$$(4) \frac{1}{10}$$

۵۰- چند جمله‌ای مینیمال و مشخصه کدام یک از ماتریس‌های زیر با هم برابرند؟

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۵۱- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $(0, -1)$ است که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا است. کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \text{ دنباله } \left\{ \frac{1}{1+a_n} \right\} \text{ کراندار است.}$$

$$(2) \text{ سری } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \text{ همگرا است.}$$

$$(3) \text{ سری } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n} \text{ همگرا است.}$$

$$(4) \text{ سری } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^3}{1+a_n} \text{ همگرا است.}$$

۵۲- فرض کنید A مجموعه‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. با توجه به نمادهای درون $\text{int } A = A$ ، $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ ، مرز $\partial A = A$ و بستار $\bar{A} = A$ ، کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \text{int } \partial A = \emptyset$$

$$(2) \text{int } A^c = (\bar{A})^c$$

$$(3) (\text{int } A)^c = \bar{A}^c$$

$$(4) \text{int } \partial \bar{A} = \emptyset$$

۵۳- فرض کنید تابع $f: \left[\frac{\pi}{2}, \infty\right) \rightarrow (0, \infty)$ پیوسته باشد و به ازای هر $x \geq \frac{\pi}{2}$ در تساوی زیر صدق کند.

$$f(x) = \exp\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) \cos t \, dt\right)$$

در این صورت $f(x)$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) $e^{\sin x}$

(۲) $\frac{1}{2 - \cos x}$

(۳) $2 - \sin x$

(۴) $\frac{1}{2 - \sin x}$

۵۴- فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از اعداد حقیقی باشد و نگاشت $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ دوسویی و یکنواخت پیوسته باشد.

به طوری که f^{-1} نیز پیوسته باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) $U = \mathbb{R}$

(۲) ممکن است $U \neq \mathbb{R}$ ولی هر دنباله کشی در U به عضوی از U همگرا است.

(۳) ممکن است $U \neq \mathbb{R}$ ولی تصویر هر دنباله کشی در U دنباله‌ای کشی در $\mathbb{R}$ است.

(۴) ممکن است $U \neq \mathbb{R}$ ولی تصویر وارون هر دنباله کشی در $\mathbb{R}$ دنباله‌ای کشی در U است.

۵۵- فرض کنید تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یکنوا باشد و B مجموعه نقاط ناپیوستگی f باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر B نامتناهی باشد، ناپیوستگی f در نقطه‌ای از B رفع‌شدنی است.

(۲) B شامل یک بازه باز است.

(۳) B حداکثر شمارا است.

(۴) B^c حداکثر شمارا است.

۵۶- مقدار محاسبه شده برای $D = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ در یک ماشین محاسبه با روند عدد یک برابر با 10^{-5} ، به

ازای مقادیر $|h|$ برابر با صفر است.

(۱) برابر با $10^{-4}|a|$

(۲) کوچک‌تر از 10^{-5}

(۳) کوچک‌تر از $10^{-5}|a|$

(۴) کوچک‌تر از $10^{-5}|a| + 10^{-5}$

۵۷- تقریب تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه $[1, 3]$ با تکه‌های خطی درون‌یاب مدنظر است. این بازه دست کم به چند تکه مساوی تقسیم شود تا کران بالای خطای درون‌یابی برای تخمین f در سرتاسر بازه بیش از 0.0025 نباشد؟

(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۲۰

(۴) ۴۰

۵۸- فرض کنید $Q(x) = x^T A x + x^T b$ که در آن، A یک ماتریس $n \times n$ متقارن و معین مثبت، و b ، $n \times 1$ ، داده شده‌اند. روش نیوتن برای محاسبه کمینه‌کننده Q از تکرار دست می‌یابد.

(۱) برخی نقاط آغازین به جواب یکتای سراسری با دست کم n

(۲) برخی نقاط آغازین به جواب سراسری با بیش از n

(۳) برخی نقاط آغازین به جوابی موضعی برای Q با دست کم n

(۴) هر نقطه آغازین به جواب یکتای سراسری Q در یک

۵۹- فرض کنید رابطه تکراری به صورت $x_{n+1} = \cos^2 x_n - 1$ ، $n = 0, 1, \dots$ به $x^* = 0$ همگراست. در این صورت، نرخ همگرایی مجانبی برابر است با:

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۶۰- اگر $\bar{x}$ جواب محاسبه شده برای جواب دستگاه $Ax = b$ ، عدد حالت A برابر با 10^3 و دقت نسبی درایه‌های A و b تقریباً برابر با 10^{-10} و روند عدد یک در ماشین محاسبه مورد استفاده برای محاسبه $\bar{x}$ برابر با 10^{-14} باشند، آنگاه تعداد ارقام قابل اعتماد در $\bar{x}$ تقریباً برابر است با:

(۱) ۳

(۲) ۷

(۳) ۱۱

(۴) ۱۵

۶۱- با توجه به نمودار ساقه و برگ ۷ | ۳ | ۴ میانگین کدام است؟

(۱) ۴۰

(۲) ۴۵

(۳) ۵۴

(۴) ۷۳/۵

۶۲- در بسط $(x+y+z+u)^5$ ضریب $x^2 z^2 u$ کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۲۰

(۳) ۳۰

(۴) ۶۰

۶۳- یک نمونه تصادفی شامل ۳۰ دانشجویان از دانشگاه‌های مختلف کشور انتخاب کرده و از آن‌ها سوال شده است که آیا از رشته تحصیلی خود راضی‌اند یا خیر. ۷ نفر جواب منفی داده‌اند. اگر افراد x , y و z در بین جواب‌دهندگان باشند، احتمال این‌که هر سه نفر جواب منفی داده باشند، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{70}$

(۲) $\frac{3}{7}$

(۳) $\frac{7}{30}$

(۴) $\frac{1}{116}$

۶۴- فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل و $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ باشد. مقدار احتمال شرطی A به شرط $A \cup B$ کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{1}{5}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) ۱

۶۵- فرض کنید A' و B' بیانگر متمم پیشامدهای A و B و $A \Delta B$ نشان‌دهنده تفاضل متقارن این دو پیشامد باشند. اگر $P(A' \cap B') = 0.3$, $P(A) = 0.1$ و $P(A \cap B) = 0.2$, آنگاه مقدار $P(A \Delta B)$ کدام است؟

(۱) ۰.۳

(۲) ۰.۴

(۳) ۰.۵

(۴) ۰.۶

ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه:

۶۶- خروجی الگوریتم زیر از چه مرتبه‌ای است؟

$j = 0$

$i = 1$

while($i \leq n$)

$j = j + 2 * i$

$i = 4 * i$

print j

(۱) n

(۲) $\sqrt{n}$

(۳) $n\sqrt{n}$

(۴) $\sqrt{n \lg n}$

۶۷- با توجه به رابطه بازگشتی زیر، $T(n)$ از چه مرتبه‌ای است؟

$$\begin{cases} T(2^n) = T(2^{n-1}) + \theta(n^2) \\ T(1) = \theta(1) \end{cases}$$

(۲) n^3
(۴) $(\lg n)^3$

(۱) $\lg n$

(۳) $n^{\lg 2}$

۶۸- هنگامی که می‌خواهیم نشان دهیم زمان یا حافظه یک الگوریتم، حداقل از مرتبه تابعی مانند $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ است، از کدام نماد باید استفاده کنیم؟

(۲) Ω

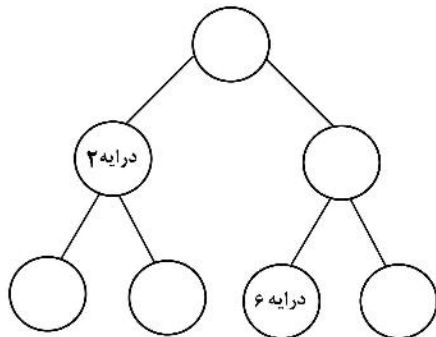
(۱) o

(۴) O

(۳) ω

۶۹- کدام گزاره یا گزاره‌ها درست است؟

الف) سومین بزرگترین کلید در یک MAX heap با کلیدهای متمایز می‌توان در درایه با اندیس ۲ باشد.
ب) سومین بزرگترین کلید در یک MAX heap با کلیدهای متمایز می‌توان در درایه با اندیس ۶ باشد.



(۱) فقط الف

(۲) فقط ب

(۳) الف و ب

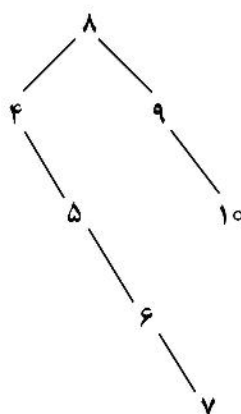
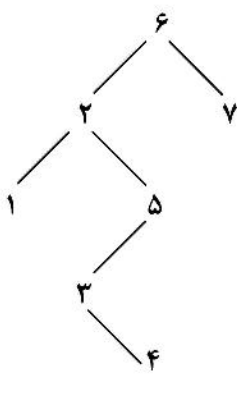
(۴) هیچ‌کدام

۷۰- کدام درخت یا درخت‌ها را می‌توان با یک چرخش (rotation) به درخت AVL تبدیل کرد؟

درخت AVL، درختی است که در آن برای هر رأس، قدر مطلق اختلاف ارتفاع زیر درخت‌های راست و چپ، حداکثر یک است. همچنین چرخش (rotation) در درخت AVL مانند چرخش در درخت قرمز-سیاه تعریف می‌شود.

(الف)

(ب)



(۱) فقط الف

(۲) فقط ب

(۳) هر دو

(۴) هیچ‌کدام

۷۱- الگوریتم مرتب‌سازی سریع (Quick sort) را روی آرایه‌ای شامل ۴ عدد اجرا می‌کنیم. تعداد مقایسه‌ها چه عددی نمی‌تواند باشد؟

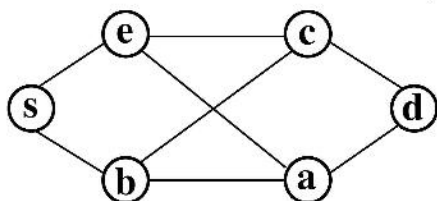
- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۷۲- حداقل حافظه کمکی لازم برای دو عمل زیر، به ترتیب از راست به چپ از چه مرتبه‌ای است؟

- برعکس کردن یک لیست پیوندی (linked list) یک طرفه n عضوی
- برعکس کردن یک لیست پیوندی (linked list) دو طرفه n عضوی

- (۱) n و n
(۲) n و ۱
(۳) ۱ و n
(۴) ۱ و ۱

۷۳- دو الگوریتم BFS (جستجوی اول سطح) و DFS (جستجوی اول عمق) را روی گراف زیر و با شروع از رأس S اجرا می‌کنیم. در هر گام از BFS یا DFS اگر چند رأس برای انتخاب وجود داشت، رأسی را انتخاب می‌کنیم که از نظر ترتیب الفبای انگلیسی زودتر باشد. درخت‌های حاصل از BFS و DFS را به ترتیب T_B و T_D می‌نامیم. فاصله دو رأس a و e از همدیگر (و نه از s) در T_D و T_B به ترتیب از راست به چپ چند است؟



- (۱) ۱ و ۱
(۲) ۱ و ۳
(۳) ۱ و ۳
(۴) ۳ و ۳

۷۴- پیاده‌سازی معمولی کدام مورد با داده ساختار پشته (stack) انجام می‌شود؟

- (۱) Radix sort
(۲) Insertion sort
(۳) Quick sort
(۴) Bubble sort

۷۵- کدام گزاره یا گزاره‌ها درست است؟

- الف) ارتفاع یک درخت جستجوی دودویی (binary search tree) با ۱۰ کلید می‌تواند ۹ باشد.
ب) اگر داده‌ها کلیدها اعداد ۱, ۲, ..., ۷ باشند فقط یک درخت جستجوی دودویی به ارتفاع ۲ وجود دارد.
(۱) فقط الف
(۲) فقط ب
(۳) الف و ب
(۴) هیچ‌کدام

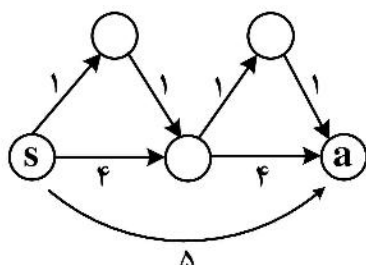
۷۶- G یک گراف همبند با n رأس و e یال است. همچنین می‌دانیم که وزن همه یال‌های G یکسان است. بهترین زمان برای یافتن یک زیردرخت فراگیر (پوشای) کمینه G از چه مرتبه‌ای است؟

- (۱) e
(۲) n
(۳) $n \lg n$
(۴) $e \lg n$

۷۷- قصد داریم الگوریتمی طراحی کنیم که با ورودی گرفتن یک درخت دودویی T با n رأس (گره) تعیین کند T درخت جستجوی دودویی است یا خیر. بهترین زمان برای این کار از چه مرتبه‌ای است؟

- (۱) n
(۲) $n \lg n$
(۳) n^2
(۴) $n^2 \lg n$

۷۸- الگوریتم دایکسترا را روی گراف زیر و با شروع از رأس s اجرا می‌کنیم. فاصله a از s در ابتدا $+\infty$ در نظر گرفته می‌شود.



هنگام اجرای الگوریتم، فاصله a از s چند بار تغییر می‌کند؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۷۹- کدام مسئله یا مسائل از ۳ مسئله زیر دارای الگوریتم حریصانه (greedy) با زمان چند جمله‌ای است؟

کوله پشتی ۰، ۱ / کوله پشتی کسری / زیردرخت فراگیر (پوشای) کمینه (MST)

۱) فقط کوله پشتی ۰، ۱

۲) فقط کوله پشتی ۰، ۱ و زیردرخت فراگیر (پوشای) کمینه

۳) فقط کوله پشتی کسری و زیردرخت فراگیر (پوشای) کمینه

۴) فقط کوله پشتی کسری

۸۰- بهترین زمان برای تعیین دوبخشی بودن یا نبودن یک گراف با n رأس و e یال از چه مرتبه زمانی است؟ (گراف دوبخشی

یعنی گرافی که بتوان رأس‌های آن را به دو بخش A و B افزایش کرد به‌طوری‌که هر یال G یک سر در A و یک سر در B

داشته باشد.)

۲) $\theta(ne)$

۱) $\theta(n+e)$

۴) مسئله NP-hard است.

۳) $\omega(ne)$ اما چند جمله‌ای

۸۱- کدام گزاره یا گزاره‌ها در مورد مسئله جریان (شار) در شبکه‌ها (Network Flow) درست است؟

الف) اگر ظرفیت هر یال مضرب $\frac{1}{p}$ باشد، مقدار جریان (شار) بیشینه نیز مضرب $\frac{1}{p}$ است.

ب) دقیقاً یک برش (cut) وجود دارد که ظرفیت آن برابر با مقدار جریان بیشینه است.

۱) فقط الف ۲) فقط ب ۳) هر دو ۴) هیچ کدام

۸۲- کدام گزاره یا گزاره‌ها در مورد کلاس P درست است؟

الف) $L \in P$ اگر و تنها اگر الگوریتم A موجود باشد که برای هر ورودی به طول n بیت، عدد ثابت $c > 0$ موجود

باشد که A در زمان $O(n^c)$ پاسخ درست را بدهد.

ب) $L \in P$ اگر و تنها اگر برای هر ورودی به طول n بیت، الگوریتم A و عدد ثابت $c > 0$ موجود باشد که A در

زمان $O(n^c)$ پاسخ درست را بدهد.

۱) فقط الف ۲) فقط ب ۳) هر دو ۴) هیچ کدام

۸۳- G یک گراف وزن‌دار با وزن‌های مثبت و با n رأس است؛ به‌طوری‌که بیشترین درجه رأس‌ها $\lg n$ است. کدام الگوریتم

برای محاسبه فاصله هر دو رأس از همدیگر مرتبه زمانی بهتری دارد؟ (فرض کنید n به اندازه کافی بزرگ است.)

۱) فلویید - وارشال

۲) n بار بلمن - فورد (با شروع از هر رأس)

۳) n بار BFS (با شروع از هر رأس)

۴) n بار دایکسترا (با شروع از هر رأس)

۸۴- فرض کنید $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ یک تابع باشد که برای هر i محاسبه $f(i)$ در زمان $\theta(\sqrt{i})$ ممکن باشد. همچنین برای هر i و j که $1 \leq i \leq j \leq n$ تعریف می‌کنیم:

$$g(i, j) = \begin{cases} f(i) : i = j \\ \max_{i \leq k \leq j} \{g(i, k-1) + g(k, j)\} : i < j \end{cases}$$

محاسبه $g(1, n)$ با الگوریتم پویا (دینامیکی) ساده‌ای که از رابطه بالا حاصل می‌شود، از چه مرتبه زمانی است؟

$$(1) n^2 \sqrt{n}$$

$$(2) n^2$$

$$(3) n^3$$

$$(4) n^2 \sqrt{n}$$

۸۵- فرض کنید $b = b_1 b_2 \dots b_n$ یک رشته n حرفی با یک الفبای Σ باشد. منظور از یک دنباله b ، یک رشته حاصل از

حذف برخی حرف‌های b است (بنابراین b دارای 2^n زیردنباله است) به عنوان مثال xyy یک زیردنباله $zxywy$ است اما yx زیردنباله آن نیست.

همچنین منظور از یک رشته متقارن، رشته‌ای است که قرائت آن از چپ برابر با قرائت آن از راست باشد؛ به عنوان مثال $\gamma\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\gamma$ متقارن است.

طول طولانی‌ترین زیردنباله متقارن $b_i b_{i+1} \dots b_j$ را با $B[i, j]$ نشان می‌دهیم. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$x = \max\{B[i, j-1], B[i+1, j]\}$$

$$y = B[i+1, j-1]$$

کدام گزینه برای i و j هایی که $i < j$ درست است؟

$$(1) B[i, j] = \begin{cases} x & : b_i \neq b_j \\ y+1 & : b_i = b_j \end{cases}$$

$$(2) B[i, j] = \begin{cases} x & : b_i \neq b_j \\ y+2 & : b_i = b_j \end{cases}$$

$$(3) B[i, j] = \begin{cases} x+1 & : b_i \neq b_j \\ y+1 & : b_i = b_j \end{cases}$$

$$(4) B[i, j] = \begin{cases} x+1 & : b_i \neq b_j \\ y+2 & : b_i = b_j \end{cases}$$

۸۶- فرض کنیم L زبان گرامر زیر باشد (S متغیر شروع):

$$S \rightarrow aS \mid aB$$

$$B \rightarrow bB \mid \lambda$$

به ازای کدام مقدار برای x رشته $aaa \mid b \mid aaa \mid a \mid a$ عضو L است؟

(۱) فقط a

(۲) فقط b

(۳) هم a و هم b

(۴) نه a و نه b

۸۷- فرض کنیم L_1 و L_2 به ترتیب زبان دو گرامر G_1 و G_2 باشد (S متغیر شروع):

$$G_1 : S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \lambda$$

$$G_2 : S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \lambda$$

کدام یک از این دو زبان منظم هستند؟

(۱) فقط L_1

(۲) فقط L_2

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۸۸- دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف) فرض کنیم M یک NFA (اتوماتای متناهی نامعین) باشد و M' یک NFA کاملاً شبیه M با این تفاوت که حالت‌های پایانی (پذیرش) M در M' غیرپایانی و حالت‌های غیرپایانی M در M' حالت‌های پایانی شده‌اند. در این صورت زبان M' مکمل زبان M است.

ب) فرض کنیم M یک NFA با زبان L باشد و M' از روی M با پاک کردن کلیه یال‌های خروجی از تمام حالت‌های پذیرش به دست آمده است. در این صورت داریم:

$$L(M') = \{w \in L : w = uv \text{ که } v \in \Sigma^+ \text{ وجود ندارد که } u \in L\}$$

کدام یک از این دو عبارت صحیح است؟

(۱) فقط الف

(۲) فقط ب

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۸۹- فرض کنیم L زبان گرامر زیر باشد (S متغیر شروع):

$$S \rightarrow aA \mid bB$$

$$A \rightarrow aB \mid bS \mid \lambda$$

$$B \rightarrow bA \mid aS$$

کدام یک از دو رشته $x = a^{12}b^6a^6$ و $y = b^{15}a^{10}b^8$ در L قرار دارد؟

(۱) فقط x

(۲) فقط y

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۹۰- به ازای کدام مقدار x عبارت $b^7 a^5 b^3 x a^5$ در زبان عبارت منظم $r = b^* ab^* (b^* ab^* ab^* ab^* ab^*)^*$ قرار می گیرد؟

(۱) فقط a

(۲) فقط b

(۳) هم a و هم b

(۴) نه a و نه b

۹۱- فرض کنیم L زبان NFA زیر باشد:

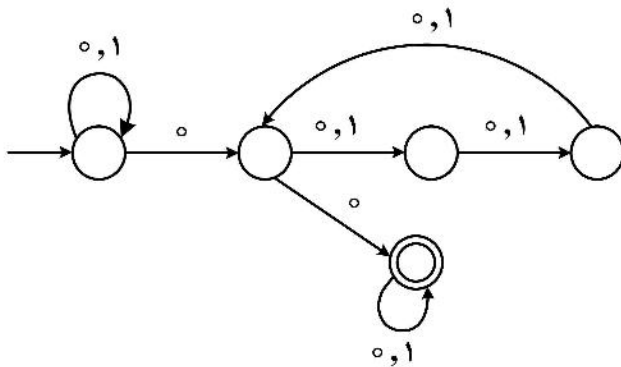
با قراردادن کدام یک از دو مقدار $\circ$ و ۱ به جای x در عبارت $۱۱۱۱\circ\circ۱\circ x ۱\circ\circ\circ ۱۱$ عبارت حاصل در L قرار می گیرد؟

(۱) فقط صفر

(۲) فقط ۱

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام



۹۲- کدام یک از دو زبان زیر مستقل از متن است؟

$$L_1 = \{a^n c^m b^n \mid n > m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^k \mid k \neq n + m, n, m, k \geq 0\}$$

(۱) فقط L_1

(۲) فقط L_2

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۹۳- اگر L یک زبان منظم باشد، عدد صحیح مثبت p به نام طول تزریق L وجود دارد که هر رشته $w \in L$ با $|w| \geq p$

را می توان با شرایط گفته شده در لم تزریق تجزیه کرد. مقدار p منحصر به فرد نیست چون اگر p طول تزریق L باشد، هر عدد بزرگتر از p نیز هست. همواره می توان کوچکترین طول تزریق را یافت. کوچکترین طول تزریق برای زبان زیر چقدر است؟

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{تعداد وقوع زیر رشته } ۱۰ \text{ در } w \text{ برابر است با تعداد وقوع زیر رشته } ۰۱\}$$

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) بزرگتر مساوی ۴

۹۴- فرض کنید M ماشین تورینگ زیر باشد:

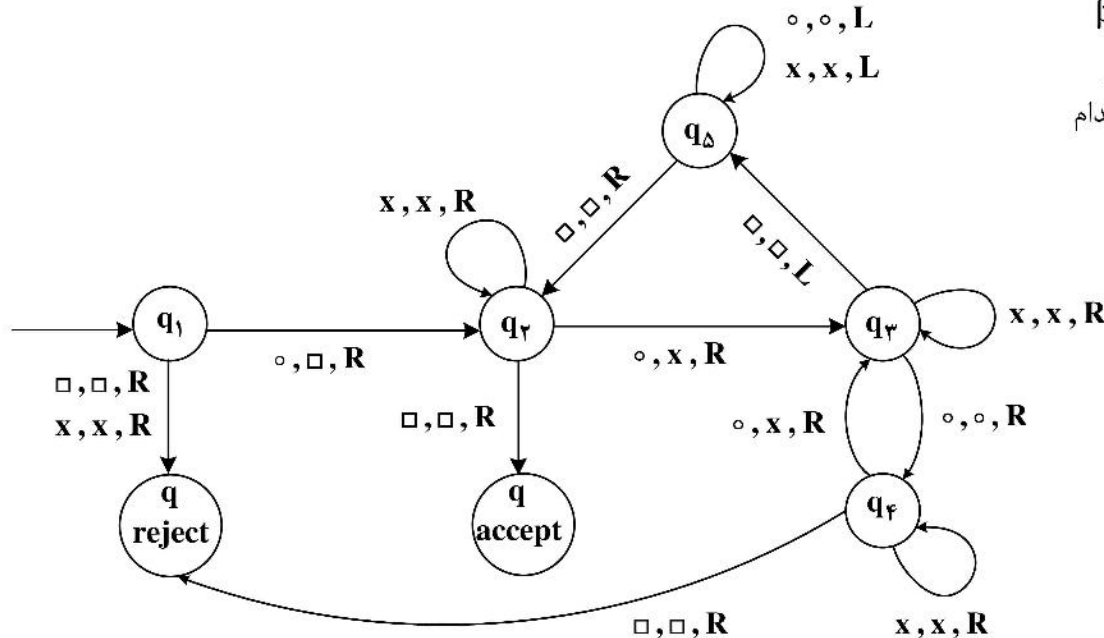
اگر $\alpha = 0^{16}$ و $\beta = 0^{17}$ کدام یک از این دو رشته توسط M پذیرفته می شود؟

(۱) فقط α

(۲) فقط β

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام



۹۵- الف) یک Mid PDA یک PDA توسعه یافته است که می تواند وسط پشته را بخواند. در واقع تابع انتقال در Mid PDA تابع چهار چیز است: نماد ورودی، نماد بالایی پشته، حالت فعلی ماشین و نماد وسط پشته (اگر پشته k نماد داشته باشد،

$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ آمین نماد از بالا، نماد وسط پشته خواهد بود و اگر پشته تهی باشد λ نماد وسط پشته در نظر گرفته می شود.) وقتی

Mid PDA حرکت می کند، حالت خود را تغییر می دهد، نمادی در پشته درج می شود و حداکثر یک نماد از ورودی خوانده می شود. (همان طور که گفته شد نماد وسط پشته در حرکت این ماشین مؤثر است.)

ب) یک 2PDA یک PDA با دو پشته متمایز است. حرکت در 2PDA براساس حالت فعلی ماشین، نمادهای بالایی پشته ها و نماد ورودی است. وقتی حرکتی انجام می شود، ماشین حالت خود را تغییر می دهد، چیزی در پشته اول درج می شود، چیزی در پشته دوم درج می شود (مستقل از پشته اول) و حداکثر یک نماد از ورودی می خواند.

کدام یک از این دو ماشین Mid PDA و 2PDA از PDA معمولی قوی تر است؟

(۱) فقط Mid PDA

(۲) فقط 2PDA

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۹۶- کدام یک از استدلال‌های زیر معتبر است؟ (∴ نماد نتیجه‌گیری است.)

(الف)	(ب)
$\neg a \wedge (a \rightarrow b)$	$p \rightarrow q$
$\therefore b$	$q \rightarrow r$
	$\therefore p \rightarrow r$

(۲) فقط (ب)

(۱) فقط (الف)

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

۹۷- فرض کنیم زبان، شامل شش ثابت $C_1, C_2, \dots, C_6$ ، نمادهای محمولی دو موضعی O_1, O_2 ، نمادهای محمولی یک موضعی F_1, F_2 باشد. با فرض متمایز بودن b_i ها، تعبیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I(C_i) = b_i \quad 1 \leq i \leq 6$$

$$I(O_1) = \{(b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_3, b_4), (b_4, b_5), (b_5, b_6)\} = \{(b_i, b_{i+1}) \mid (1 \leq i \leq 5)\}$$

$$I(O_2) = \{(b_i, b_{i+2}) \mid 1 \leq i \leq 4\}$$

$$I(F_1) = \{b_6\}$$

$$I(F_2) = \{b_2, b_5\}$$

فرض کنیم: $\alpha : \forall x (F_2(x) \rightarrow \exists y \exists z (O_1(x, y) \wedge O_2(x, z)))$
 کدام گزینه درست است؟ $\beta : \forall x (F_1(x) \rightarrow \exists y \exists z (O_1(y, x) \wedge O_2(x, z)))$

(۱) $I \models \alpha, I \models \beta$

(۲) $I \models \alpha, I \models \beta$

(۳) $I \models \alpha, I \models \beta$

(۴) $I \models \alpha, I \models \beta$

۹۸- در استدلال زیر در سیستم استنتاج طبیعی،

$$\frac{\frac{\frac{A(x)}{\exists x A(x)} \rightarrow \forall x B(x)}{\forall x B(x)}}{B(x)} \quad \frac{A(x)}{\exists x A(x)}$$

$$\frac{A(x) \rightarrow B(x)}{\forall x (A(x) \rightarrow B(x))}$$

کدام گزینه در مورد قانون‌های معرفی سور عمومی (VI) و معرفی سور وجودی (EI) درست است؟
 (۱) هر دو به درستی استفاده شده‌اند.

(۲) فقط معرفی سور عمومی به درستی استفاده شده است.

(۳) فقط معرفی سور وجودی به درستی استفاده شده است.

(۴) هیچ کدام به درستی استفاده نشده است.

۹۹- دو فرمول زیر در منطق گزاره‌ها را در نظر بگیرید:

$$\alpha \equiv \neg A_1 \wedge A_2 \wedge (\neg A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_2)$$

$$\beta \equiv A_2 \wedge (\neg A_3 \vee A_1) \wedge (\neg A_1 \vee A_2) \wedge (\neg A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_3)$$

برای کدام فرمول یک ارزش‌دهی به اتم‌ها وجود دارد که در آن ارزش‌دهی، فرمول ارزش درست پیدا کند؟

(۱) هر دو α, β (۲) فقط β

(۳) فقط α (۴) هیچ‌کدام از α, β

۱۰۰- یک اثبات در منطق گزاره‌ها را شهودی گوییم هرگاه در آن از قانون حذف دو نقیض $(\neg p \vdash p)$ استفاده نشده

باشد. در غیر این صورت اثبات در منطق کلاسیک خواهد بود. کدام گزینه در مورد فرمول $\neg p \vdash p \rightarrow \neg p$ در

منطق گزاره‌ها درست است؟

(۱) در منطق شهودی و منطق کلاسیک قابل اثبات است.

(۲) در منطق کلاسیک قابل اثبات است ولی در منطق شهودی خیر.

(۳) در منطق شهودی قابل اثبات است ولی در منطق کلاسیک خیر.

(۴) نه در منطق شهودی و نه در منطق کلاسیک قابل اثبات نیست.

۱۰۱- کدام گزینه در مورد فرمول زیر در منطق محمولات درست است؟

$$\forall x (\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow (Q(x) \rightarrow \neg P(x)))$$

(۱) غیر ارضاء‌پذیر (۲) غیر معتبر ولی ارضاء‌پذیر (Satisfiable)

(۳) معتبر (Valid) (۴) فرمول ساختاری درستی ندارد.

۱۰۲- مدل‌ها در منطق محمولات معمولاً ناتهی در نظر گرفته می‌شوند. فرض کنیم این شرط را در نظر نگیریم و اجازه

دهیم مدل‌ها تهی نیز باشند.

فرمول زیر را در منطق محمولات در نظر بگیرید:

$$\neg \exists x (P(x)) \wedge \forall x P(x)$$

این فرمول :

(۱) اگر مدل‌ها بتوانند تهی باشند معتبر است و اگر مدل‌ها ناتهی باشند نیز معتبر است.

(۲) اگر مدل‌ها بتوانند تهی باشند نامعتبر و ارضاء‌پذیر و اگر مدل‌ها ناتهی باشند غیر ارضاء‌پذیر است.

(۳) اگر مدل‌ها بتوانند تهی باشند نامعتبر ولی ارضاء‌پذیر است و اگر مدل‌ها ناتهی باشند نیز نامعتبر ولی ارضاء‌پذیر است.

(۴) اگر مدل‌ها بتوانند تهی باشند نامعتبر ولی ارضاء‌پذیر است و اگر مدل‌ها بتوانند تهی باشند معتبر است.

۱۰۳- کدام گزینه بهترین ترجمه در منطق محمولات برای عبارت زیر است؟ (نمادهای مناسب به‌طور طبیعی و یکنواخت

تعریف می‌شوند)

- هر کلاس دانش‌آموزی دارد که نسبت به همه دانش‌آموزان دیگر آن کلاس نمره بهتری می‌گیرد.

$$(1) \forall x (C(x) \wedge \exists y (M(x, y) \wedge \forall z (M(x, z) \wedge z \neq y \wedge G(y, z))))$$

$$(2) \forall x (C(x) \wedge \exists y (M(x, y) \wedge \forall z ((M(x, z) \wedge z \neq y) \rightarrow G(y, z))))$$

$$(3) \forall x (C(x) \rightarrow \exists y (M(x, y) \wedge \forall z (M(x, z) \wedge z \neq y \wedge G(y, z))))$$

$$(4) \forall x (C(x) \rightarrow \exists y (M(x, y) \wedge \forall z ((M(x, z) \wedge z \neq y) \rightarrow G(y, z))))$$

۱۰۴- کدام گزینه بهترین ترجمه برای عبارت زیر در منطق گزاره‌ها است؟

– برای آن که جواد عضو این باشگاه شود لازم است که تلاش زیادی کند، فقط اگر اتفاق خاصی نیفتد.

جواد عضو این باشگاه می‌شود: M

جواد تلاش زیادی می‌کند: T

اتفاق خاصی می‌افتد: E

$$E \rightarrow \neg(\neg T \rightarrow M) \quad (۱)$$

$$\neg E \rightarrow \neg(\neg T \rightarrow \neg M) \quad (۲)$$

$$\neg(\neg T \rightarrow \neg M) \rightarrow E \quad (۳)$$

$$\neg\neg E \rightarrow \neg(\neg T \rightarrow \neg M) \quad (۴)$$

۱۰۵- زبان مرتبه اول $L = \{C, f_1, f_2, f_3, R\}$ شامل ثابت C ، نماد تابعی یک‌موضعی f_1 ، نمادهای تابعی

دوموضعی f_2, f_3 و نماد رابطه‌ای دوتایی R را در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $M = \langle \mathbb{Z}; \circ, s, +, \times, < \rangle$ یک ساختار در این زبان است که در آن $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح، s تابع

تالی و بقیه نمادها تعبیر طبیعی خود را دارند.

کدام گزینه صحیح است؟

$$M \models \exists x \forall y (R(x, y) \vee x = y) \quad (۲)$$

$$M \models \forall x R(C, f_3(x, f_1(C))) \quad (۱)$$

$$M \models \forall x R(x, f_2(x, f_1(C))) \quad (۴)$$

$$M \models \forall x R(C, f_2(x, f_1(C))) \quad (۳)$$

۱۰۶- فرض کنیم $\alpha = 1 + \omega^2$ و $\beta = \omega^2 + 1$. کدام یک از این دو اوردینال حدی است؟

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

(۲) فقط β

(۱) فقط α

۱۰۷- فرض کنیم $A = \{3n | n \in \mathbb{N}\}$ ، $B = \{3n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$ و $C = \{3n + 2 | n \in \mathbb{N}\}$. اعضای مجموعه $X = A \cup B \cup C$

را این گونه مرتب می‌کنیم که اعضای مجموعه‌های A و B و C ترتیب طبیعی خود را خواهند داشت، هر عضو A از هر عضو

B و C کوچکتر است و هر عضو B هم از هر عضو مجموعه C کوچکتر است. اگر α اوردینال مجموعه خوش‌ترتیب X با

ترتیب فوق باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$\alpha = \omega + \omega \quad (۲)$$

$$\alpha = \omega \quad (۱)$$

$$\alpha > \omega + \omega \quad (۴)$$

$$\omega < \alpha < \omega + \omega \quad (۳)$$

۱۰۸- رابطه ترتیب جزئی R را بر X خوش‌بنیاد گوییم هرگاه هر زیرمجموعه ناتهی X دارای یک عضو مینیمال باشد. دو

عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف) رابطه ترتیب جزئی بر $\mathbb{N}$ وجود دارد که خوش‌بنیاد نباشد.

ب) رابطه ترتیب جزئی بر $\mathbb{Z}$ وجود دارد که خوش‌بنیاد نباشد.

کدام یک از این دو عبارت درست است؟

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

(۲) فقط ب

(۱) فقط الف

۱۰۹- کدام یک از دو مجموعه $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ با $\mathbb{R}$ هم‌توان‌اند؟

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

(۲) فقط B

(۱) فقط A

۱۱۰- دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

(الف) $|A| < |B|$ اگر و تنها اگر A با زیرمجموعه سره‌ای از B هم‌توان باشد.

(ب) اگر $|A| < |B|$ و $|B| \leq |C|$ آن‌گاه $|A| < |C|$.

کدام یک از این دو عبارت صحیح است؟

- (۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) هر دو (۴) هیچ‌کدام

۱۱۱- دو اصل زیر را در نظریه مجموعه‌ها در نظر بگیرید:

(الف) مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضوی ندارد.

(ب) مجموعه‌ای وجود دارد.

برای اثبات (الف) با فرض (ب) در نظریه مجموعه‌ها از چه اصولی استفاده می‌شود؟

(۱) اصل تصریح (۲) اصل گسترش

(۳) زوج سازی (۴) بدون نیاز به اصل دیگری، اثبات می‌شود.

۱۱۲- فرض کنیم $S_0 = \mathbb{N}$, $S_1 = P(\mathbb{N})$, $S_2 = P(P(\mathbb{N}))$ و $P(X)$ مجموعه توانی X است.

همچنین فرض کنید می‌دانیم که S_n ها همگی مجموعه هستند. برای اثبات این مطلب در نظریه اصل موضوعی

مجموعه‌ها که $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ یک مجموعه است از کدام اصول استفاده می‌شود؟

- (۱) جایگذاری (۲) اجتماع
(۳) مجموعه توانی (۴) جایگذاری و اجتماع

۱۱۳- دنباله (V_α) که α اوردینال است به صورت بازگشتی بر α تعریف می‌شود:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$
- $V_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} V_\alpha$ (حدی δ)

کدام یک از دو مجموعه $V_{\omega+1}$, V_ω شمارا است؟ (با دانستن اصل انتخاب)

- (۱) فقط $V_{\omega+1}$ (۲) فقط V_ω
(۳) هر دو (۴) هیچ‌کدام

۱۱۴- اوردینال α را یک کاردینال گوئیم هرگاه با هیچ اوردینال کوچکتر از خودش هم‌توان نباشد. فرض کنیم $\beta = \omega^\omega$

و $\alpha = \omega \cdot \omega$. کدام یک از این دو اوردینال، کاردینال هستند؟

- (۱) فقط α (۲) فقط β
(۳) هر دو (۴) هیچ‌کدام

۱۱۵- کدام گزاره درست است؟

(الف) فرض کنیم α اوردینال دلخواهی باشد. در این صورت برای هر دو اوردینال $\beta, \beta' < \omega^\alpha$ داریم $\beta + \beta' < \omega^\alpha$.

(ب) برای هر اوردینال α اوردینال حدی β وجود دارد که $\beta > \alpha$.

- (۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب)
(۳) هر دو (۴) هیچ‌کدام

ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات:

۱۱۶- تعداد کل رشته‌های به طول n با نمادهای ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و $\circ$ به طوری که مجموع تعداد $\circ$ ها و $\circ$ های ظاهر شده زوج باشد چقدر است؟

$$(1) \frac{5^n + 1}{2}$$

$$(2) \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{5+i}{i}$$

$$(3) 3^n + 1$$

$$(4) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{3+i}{i}$$

۱۱۷- با بررسی نتایج یک تحقیق در مورد اینترنت دانش آموزان مشخص شد، ۹۶ درصد اینترنت ثابت، ۴۲ درصد اینترنت همراه و ۳۹ درصد هم اینترنت ثابت و هم اینترنت همراه دارند. چند درصد دانش آموزان اصلاً اینترنت ندارند؟

$$(1) 1$$

$$(2) 7$$

$$(3) 3$$

$$(4) 4$$

۱۱۸- فرض کنیم چهار کارتن شبیه به هم برای قرار دادن ظروف در اختیار داریم. با این فرض که ممکن است بعضی کارتن‌ها خالی بمانند به چند روش می‌توان نه ظرف مختلف را در این کارتن‌ها قرار داد؟

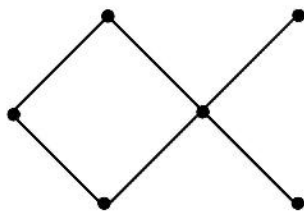
$$(1) 10795$$

$$(2) 11050$$

$$(3) 11051$$

$$(4) 10796$$

۱۱۹- فرض کنیم $x(G, k) = k(k-1)^3 f(k)$ چند جمله‌ای رنگی گراف زیر باشد. در این صورت $f(4)$ در کدام بازه قرار دارد؟



$$(1) [0, 4)$$

$$(2) [4, 8)$$

$$(3) [8, 12)$$

$$(4) [12, +\infty)$$

۱۲۰- دو عبارت زیر را در نظر بگیرید (گراف‌ها ساده هستند):

(الف) فرض کنیم G یک گراف از مرتبه $n \geq 11$ باشد. در این صورت حداقل یکی از G یا $\bar{G}$ غیرمسطح است.

(ب) فرض کنیم G یک گراف همبند مسطح از مرتبه $n < 12$ باشد. در این صورت $\delta(G) \leq 4$.

کدام یک از این دو عبارت صحیح است؟ (دلتای کوچک به معنی کمترین درجه رأس‌های گراف است.)

- (۱) فقط (الف) (۲) فقط (ب) (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۱۲۱- شماره دانشجویی زهرا ۶۳۲۸۳۶۳ است. او ارقام شماره دانشجویی و تعداد تکرار هر رقم را می‌داند ولی ترتیب آنها را فراموش کرده است ولی می‌داند که اولین ۶ قبل از اولین ۳ است. چند شماره مختلف با این شرایط می‌توان برای او در نظر گرفت؟ (به عنوان مثال ۲۶۸۳۶۳۳ و ۲۶۶۸۳۳۳ دو تا از حالات مطلوب است).

(۱) ۱۶۸

(۲) ۱۵۶

(۳) ۱۵۹

(۴) ۱۷۱

۱۲۲- فرض کنیم A ضریب x^2 و B ضریب x^5 در تابع $\frac{1+x^3}{(1+x)^3}$ باشد. $A+B$ چقدر است؟

(۱) -۱۲

(۲) ۹

(۳) ۱۲

(۴) -۹

۱۲۳- چند عدد چهار رقمی با ارقام ۹ و ... و ۱ و ۰ وجود دارد به طوری که ارقام مجاور یکسان نباشند؟ (اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد).

(۱) ۷۲۹۰

(۲) ۴۵۳۶

(۳) ۵۰۴۰

(۴) ۶۵۶۱

۱۲۴- چند دنباله به طول ۷ با نمادهای ۱ و ۰ وجود دارد که شامل سه صفر متوالی باشد؟ (مثلاً اگر شامل چهار صفر متوالی باشد، شامل سه صفر متوالی هم خواهد بود).

(۱) ۵۰

(۲) ۴۷

(۳) ۴۸

(۴) ۴۹

۱۲۵- مردی ۷ دوست دارد. به چند روش او می‌تواند زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از این دوستان را در ۷ شب متوالی برای شام دعوت کند به طوری که هر دو نفر از این دوستانش دقیقاً در یک شب با هم دعوت شده باشند؟

(۱) ۷!

(۲) $3 \times 7!$

(۳) $15 \times 7!$

(۴) $6 \times 7!$

۱۲۶- تعداد ارزش‌دهی‌های درست و غلط $(1, 0)$ به s, r, q, p که ارزش گزاره زیر را درست (یک) می‌کند، چند است؟

$$(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$$

(۲) ۱۰

(۱) ۹

(۴) ۱۵

(۳) ۱۳

۱۲۷- حداقل چند نفر داشته باشیم تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها در یک ماه و در یک روز هفته (مثلاً خرداد و دوشنبه) به دنیا آمده‌اند؟

$$(۱) ۸۶ \quad (۲) ۱۶۹$$

$$(۳) ۲۵۲ \quad (۴) ۲۵۳$$

۱۲۸- چند عدد ۶ رقمی با ارقام ۵ و ۷ وجود دارد که مضرب ۳ باشد؟

$$(۱) ۲۰ \quad (۲) ۲۱$$

$$(۳) ۲۲ \quad (۴) ۶۴$$

۱۲۹- به چند طریق می‌توان ۳ عدد متمایز از مجموعه $\{۱۴۰۱, ۱۴۰۲, \dots, ۲۰۲۲\}$ انتخاب کرد به طوری که حاصل ضرب ۳ عدد انتخاب شده، زوج باشد؟

$$(۱) \binom{۶۲۲}{۳} - \binom{۳۱۱}{۳} \quad (۲) ۳۱۱ \times ۶۲۱ \times ۶۲۰$$

$$(۳) \binom{۶۲۱}{۳} - \binom{۳۱۱}{۳} \quad (۴) ۳۱۱ \times ۶۲۰ \times ۶۱۹$$

۱۳۰- تعداد توابع $f: \{۱, ۲, \dots, ۸\} \rightarrow \{۱, ۲, \dots, ۱۰\}$ که $f(۲) \leq f(۵)$ چند است؟

$$(۱) ۶^{۱۰} \times ۴۵ \quad (۲) ۱۰^۶ \times ۴۵$$

$$(۳) ۶^{۱۰} \times ۵۵ \quad (۴) ۱۰^۶ \times ۵۵$$

۱۳۱- یک جدول ۸×۱۰ داریم که همه خانه‌های آن در ابتدا سفید است. به چند طریق می‌توان ۳ خانه از آن را سیاه کرد به طوری که هیچ ۲ خانه سیاهی در یک سطر یا در یک ستون واقع نباشد؟

$$(۱) ۶^۲ \binom{۸}{۳} \binom{۱۰}{۳} \quad (۲) ۶ \binom{۸}{۳} \binom{۱۰}{۳}$$

$$(۳) \binom{۸}{۳} \binom{۱۰}{۳} \quad (۴) \frac{۱}{۶} \binom{۸}{۳} \binom{۱۰}{۳}$$

۱۳۲- تابع مولد دنباله $a_n = 2n - 1, \forall n \geq 0$ کدام مورد است؟

$$(۱) \frac{۲}{(1-x)^2} - \frac{۳}{1-x} \quad (۲) \frac{۲}{(1-x)^2} - \frac{۱}{1-x}$$

$$(۳) \frac{۲}{(1-x)^2} + \frac{۳}{1-x} \quad (۴) \frac{۲}{(1-x)^2} + \frac{۱}{1-x}$$

۱۳۳- دنباله بازگشتی $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = 4 \\ a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. بزرگترین توان از ۲ که $a_{۴۳}$ را عاد می‌کند چند است؟

$$(۱) ۴۳ \quad (۲) ۴۴$$

$$(۳) ۴۵ \quad (۴) ۵۰$$

۱۳۴- کدام دنباله یا دنباله‌ها از دنباله‌های زیر به‌ازای همه مقادیر حقیقی a_0, a_1 همگراست؟

(الف) $(\forall n \geq 2) \quad 4a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$

(ب) $(\forall n \geq 2) \quad 6a_n = 7a_{n-1} - 2a_{n-2}$

(۲) فقط (ب)

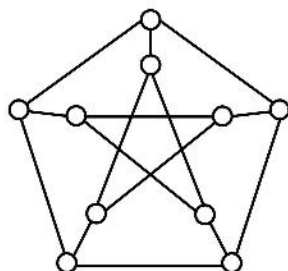
(۱) فقط (الف)

(۴) هیچ‌کدام

(۳) هر دو

۱۳۵- به چند طریق می‌توان دو رأس از گراف زیر را انتخاب کرد به طوری که دارای رأس همسایه مشترک باشند؟

ترتیب دو رأس انتخاب شده مهم نیست. (دو رأس را همسایه گوییم هرگاه بین آنها یال باشد).



(۱) ۱۵

(۲) ۳۰

(۳) ۴۵

(۴) ۶۰

