

410

C

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

عصر پنجشنبه  
۸۹/۱۱/۲۸



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.  
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

### آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد نایپوسته داخل – سال ۱۳۹۰

مجموعه ریاضی – کد ۱۲۰۸

مدت پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۱۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	ریاضیات عمومی	۳۰	۳۱	۶۰
۳	معادلات دیفرانسیل	۲۵	۶۱	۸۵
۴	آمار و احتمال	۲۵	۸۶	۱۱۰

بیهمن ماه سال ۱۳۸۹

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

**PART A: Vocabulary**

**Directions:** Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the correct choice on your answer sheet.

- 1- These ideas are not quite new; they ----- ancient philosophers.  
 1) give rise to      2) depart for      3) descend from      4) put over
- 2- The story ----- the lives of people in the last century.  
 1) persists      2) settles      3) contends      4) depicts
- 3- Strong storms have been ----- our efforts to find flood survivors.  
 1) demarcating      2) hampering      3) submitting      4) surmising
- 4- The military in most countries uses radar satellites to ----- targets through clouds and at night.  
 1) overthrow      2) disallow      3) dominate      4) track
- 5- The association works to promote the ----- of retired people as active and useful members of the community.  
 1) disclosure      2) posture      3) standpoint      4) status
- 6- At the end of the article, the author bridges all the different ----- of the argument together.  
 1) conversions      2) strands      3) dealings      4) remnants
- 7- Life in Britain was transformed by the ----- of the steam engine.  
 1) undertaking      2) advent      3) expenditure      4) disposition
- 8- There is evidence that a(n) ----- to cancer runs in some families.  
 1) predisposition      2) incident      3) prospect      4) dilemma
- 9- The journalists insisted on getting to the front line of the battle, ----- of the risks.  
 1) unaccustomed      2) inevitable      3) heedless      4) devoid
- 10- Computers operate using ----- numbers (the values 0 and 1).  
 1) trivial      2) scant      3) binary      4) dual

**PART B: Cloze Test**

**Directions:** Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

The Sahara is the great desert of northern Africa and the largest in the world. (11) ----- the Atlantic Ocean on the west to the Red Sea on the east, and from the Atlas Mountains and Mediterranean Sea on the north (12) ----- the savannas of the Sudan region on the south. (13) ----- more than 3 million square miles (8 million sq km), the Sahara is divided among many countries. Parts of the desert are known by separate names, such as the Eastern or Arabian Desert between the Nile River and the Red Sea, and the Libyan Desert along the border between Egypt and Libya. The Sahara has (14) ----- of 2 million excluding the densely settled Nile Valley, (15) ----- apart from the surrounding desert. The principal language of the people of the Sahara is Arabic and their religion is Islam.

- |                                |                            |
|--------------------------------|----------------------------|
| 11- 1) There extends between   | 2) It extends between      |
| 3) There extends from          | 4) It extends from         |
| 12- 1) to                      | 2) on                      |
| 3) at                          | 4) in                      |
| 13- 1) Across an area with     | 2) With an area of         |
| 3) To be an area with          | 4) To be an area of        |
| 14- 1) an estimated population | 2) a population estimated  |
| 3) estimated a population      | 4) a population estimating |
| 15- 1) which it considers      | 2) that is considered      |
| 3) which is considered         | 4) that it considers       |

**PART C: Reading Comprehension**

**Directions:** Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on our answer sheet.

**Passage 1:**

A word about problems. There are a great number of them. It would be an extraordinary student indeed who could solve them all. Some are present merely to complete proof in text material; others to illustrate to give practice in the results obtained. Many are introduced not to be solved as to be talked. The value of a problem is not so much in coming up with the answer as in the ideas and attempted ideas it forces on the would-be solver. Others are included in anticipation of material to be developed later, the hope and rationale for this being both to the groundwork for the subsequent theory and also to make more natural ideas, definitions, and arguments as they are introduced. Several problems, which for some reason or other seem difficult to me, are often starred (sometimes with two stars). However, even here there will be no agreement among mathematicians; many will feel that some unstarred problems should be starred and vice versa.

**16- Choose the correct sentence.**

- 1) Unstarred problems are unusually hard problems.
- 2) Mathematicians disagree on the difficulty of problems.
- 3) Mathematicians do not care about two starred problems.
- 4) There is no difference between the starred and unstarred problems.

**17- The writer expects .....**

- 1) the problems to pave the way for a rudimentary understanding of the principles of mathematics
- 2) mathematicians to disagree about the solution to some of the problems
- 3) only very talented students to be able to solve all the problems
- 4) the students to avoid those problems that are starred

18- The word "others" in line 3 refers to .....

- 1) problems      2) students      3) proofs      4) materials

19- Choose the incorrect sentence about problems.

- 1) They enjoy the same difficulty level from the viewpoint of different mathematicians.  
2) They are devised such that each type fulfills a particular purpose.  
3) They sometimes lay the groundwork for the subsequent theory to be discussed later.  
4) They look a bit abstruse to some would-be solvers.

20- A problem is valuable because .....

- 1) of its difficulty      2) it helps the development of ideas  
3) of its obtained solution      4) it requires a vast knowledge

#### Passage 2:

We adopt, as most mathematicians do, the naïve point of view regarding set theory. We shall assume that what is meant by a set of objects is intuitively clear, and we shall proceed on that basis without analyzing the concept further. Such an analysis properly belongs to the foundations of mathematics and to mathematical logic, and it is not our purpose to initiate the study of those fields.

Logicians have analyzed set theory in great detail, and they have formulated axioms for the subject. Each of their axioms expresses a property of sets that mathematicians commonly accept, and collectively the axioms provide a foundation broad enough and strong enough that the rest of mathematics can be built on them.

It is unfortunately true that careless use of set theory, relying on intuition alone can lead to contradictions. Indeed, one of the reasons for the axiomatization of set theory was to formulate rules for dealing with sets that would avoid these contradictions. Although we shall not deal with the axioms explicitly, the rules we follow in dealing with sets derive from them. In this book, you will learn how to deal with sets in an "apprentice" fashion, by observing how we handle them and by working with them yourself. At some point of your studies, you may wish to study set theory more carefully and in greater detail; then a course in logic or foundations will be in order.

21- The first sentence of the passage shows that the author .....

- 1) has, as most mathematicians have, accepted a less simplistic view of set theory  
2) thinks that most mathematicians do not agree with him about his view towards set theory  
3) believes set theory is a set of crude axioms that most mathematicians have no choice but to adopt  
4) follows a point of view similar to that of most mathematicians concerning set theory

22- The word "intiate" in line 5 is closest in meaning to .....

- 1) transmute      2) repudiate      3) modify      4) commence

23- Which of the following is NOT true about the axioms as they are discussed in the passage?

- 1) They each express a property of sets generally agreed upon by mathematicians.  
2) They are yet to be explored in detail.  
3) They form a basis on which mathematics stands.  
4) They are part of set theory.

**24- The majority of mathematicians have a ..... viewpoint of set theory.**

- 1) deterministic      2) probabilistic      3) simplistic      4) diversified

**25- What the author means when he says, "In this book, you will learn how to deal with sets in an "apprentice" fashion," is that the concept in focus would be .....**

- 1) handled to remove apprentices' misconceptions  
2) investigated to remove its contradictions  
3) presented in a way suitable for use by expert mathematicians  
4) handled in an easy and practical way

**26- The study of logic and foundation .....**

- 1) can help in-depth understanding of set theory      2) may not be beneficial  
3) may harm understanding of set theory      4) showed to be unnecessary

### Passage 3:

**More Ideals and Quotient Rings.** We continue the discussion of ideals and quotient rings.

Let us take the point of view, for the moment at least, that a field is the most desirable kind of ring. Why? If for no other reason, we can divide in a field, so that operations and results in a field more closely approximate our experience with real and complex numbers. In addition, as was illustrated by Problem 2 in the preceding problem set, a field has no homomorphic images other than itself or the trivial ring consisting of 0. Thus we cannot simplify a field by applying a homomorphism to it. Taking these remarks into consideration it is natural that we try to link a general ring, in some fashion, with fields. What should this linkage involve? We have a machinery whose component parts are homomorphisms, ideals, and quotient rings. With these we will forge the link.

But first we must make precise the rather vague remarks of the preceding paragraph. We now ask the explicit question: under what conditions is the homomorphic image of a ring a field? For commutative rings we complete the answer in this section.

Essential to treating this question is the converse to the result of Problem 2 of the problem list at the end of Section 4.

**27- The "Why?" question in line 3 is intended to .....**

- 1) explain the assumption made in the previous sentence  
2) give a hint of the author's curious mind  
3) demonstrate a question that is often asked  
4) show how curious the author is

**28- The word "approximate" in line 4 is closest in meaning to .....**

- 1) arrange      2) harmonize      3) familiarize      4) approach

**29- It is ..... to establish a link between fields and general rings.**

- 1) pessimistic      2) unrealistic      3) proper      4) improper

30- According to the passage, why can't we simplify a field by applying a homomorphism to it?

- 1) Because of a machinery whose component parts are homomorphisms, ideals, and quotient rings
- 2) Because of what was illustrated in Problem 2
- 3) Because a field has certain homomorphic images other than itself or the trivial ring consisting of 0
- 4) Because we must link a general ring, in some fashion, with fields

-۳۱ انتگرال سطحی تابع برداری  $\bar{F} = \langle x, -z^r, -2y \rangle$  روی سطح حادث از دوران منحنی به معادله  $(x-a)^r + y^r = b^r$  حول  $0 < a < b$

محور y ها عبارتست از:

$$2\pi a^r b \quad (1)$$

$$\pi ab \quad (2)$$

$$2\pi^r ab^r \quad (3)$$

$$2\pi^r a^r b \quad (4)$$

-۳۲ به ازای چه مقادیری از a و b (بر حسب c) تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| > c \\ a + bx^r & |x| \leq c \end{cases}$  مشتق‌بذیر است؟

$$b = -\frac{1}{rc^r}, a = \frac{r}{rc} \quad (1)$$

$$b = \frac{r}{rc}, a = \frac{-1}{rc^r} \quad (2)$$

$$b = \frac{1}{rc^r}, a = \frac{r}{rc} \quad (3)$$

$$b = \frac{-r}{rc}, a = \frac{1}{rc^r} \quad (4)$$

-۳۳ اگر  $\bar{F}(x,y) = (5x - y^r)\hat{i} + (3x - r)\hat{j}$  و C مثلث به رنوس (۱,۲), (۴,۲), (۱,۶) باشد که در جهت مثلثاتی طی می‌شود.

در اینصورت برابر است با:

$$20 \quad (1)$$

$$15 \quad (2)$$

$$20 \quad (3)$$

$$45 \quad (4)$$

-۳۴ مقدار  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \ln(|x| + |y|)$  کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- ۱ (۱)  
۰ (۲)  
 $\infty$  (۳)  
(۴) موجود نیست.

-۳۵ معادله یک رویه در مختصات استوانه‌ای به صورت  $r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 = 0$  است معادله این رویه در مختصات دکارتی کدام است؟

- $y^2 + x^2 - z^2 = 1$  (۱)  
 $x^2 - y^2 + z^2 = 1$  (۲)  
 $z^2 - x^2 - y^2 = 1$  (۳)  
 $y^2 - x^2 - z^2 = 1$  (۴)

-۳۶ حاصل انتگرال  $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx$  برابر است با:

- $\frac{(-1)^m n!}{(m+1)^n}$  (۱)  
 $\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$  (۲)  
 $\frac{(-1)^n m!}{(n+1)^{m+1}}$  (۳)  
 $\frac{(-1)^n n!}{n^{m+1}}$  (۴)

-۳۷ برای نمودار به معادله  $\sinh(xy) - \cosh(xy) + 1 = 0$  کدام گزینه صحیح است؟

(۱) نمودار نسبت به مبداء مختصات قرینه است.

(۲) نمودار نسبت به محور  $z$ ها قرینه است.

(۳) نمودار نسبت به محور  $x$ ها قرینه است.

(۴) نمودار نسبت به محور  $y$ ها و مبداء مختصات قرینه است.

-۳۸ فرض کنیم  $\ddot{\mathbf{R}} \neq \ddot{\mathbf{o}}$  و داشته باشیم  $\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}}(t)$ . در این صورت کدام گزینه همیشه درست است؟

(۱) طول  $\ddot{\mathbf{R}}$  ثابت است.

(۲) جهت  $\ddot{\mathbf{R}}$  ثابت است.

(۳)  $\frac{d\ddot{\mathbf{R}}}{dt}$  بر  $\ddot{\mathbf{R}}$  عمود است.

(۴)  $\frac{d\ddot{\mathbf{R}}}{dt}$  به موازات مسیر حرکت است.

-۳۹ مقدار  $\iint_R x^r \cos^r y + r \sin y - \pi) dx dy$  را که در آن  $R = \{(x, y): |x| + |y| \leq 1\}$  برابر کدام گزینه است؟

(۱)  $-\pi$

(۲)  $-2\pi$

(۳)  $\pi$

(۴)  $2\pi$

-۴۰ اگر  $I = \iint_R \cos^r \theta dx dy$  که در آن  $R$  ناحیه خارج از دایره  $r=1$  و واقع بین شعاع‌های  $\theta=0^\circ$  و  $\theta=2^\circ$  و خط  $x=\frac{\pi}{4}$  است، آنگاه مقدار  $I$  برابر کدام گزینه است؟

(۱)  $\frac{7\pi-2}{16}$

(۲)  $\frac{5\pi-1}{16}$

(۳)  $\frac{9\pi-1}{16}$

(۴)  $\frac{11\pi-1}{16}$

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y}{z} = \frac{z-1}{-z}$$

خط -۴۱

$$\frac{x^r}{q} + \frac{y^r}{r} = z \quad (1)$$

$$\frac{x^r}{r} + \frac{y^r}{q} = z \quad (2)$$

$$\frac{x^r}{q} - \frac{y^r}{r} = z \quad (3)$$

$$\frac{x^r}{r} - \frac{y^r}{q} = z \quad (4)$$

-۴۲ فرض می‌کنیم  $f(x) = \frac{1}{x^r + f^r(x)}$  تابعی باشد که  $f(1) = 1$  و به ازای  $x \geq 1$  داشته باشیم. مقدار کدام است؟

(۱) برابر  $1 + \frac{\pi}{4}$  است.

(۲) بزرگتر از  $1 + \frac{\pi}{4}$  است.

(۳) کوچکتر از  $1 + \frac{\pi}{4}$  است.

(۴) موجود نیست.

-۴۳ دامنه تابع  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{r^n \ln(n+1)}$  کدام است؟

$[0, r) \quad (1)$

$[0, r] \quad (2)$

$(0, r] \quad (3)$

$[-r, r] \quad (4)$

-۴۴ مقدار  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1.2^{\frac{1}{n}}.3^{\frac{1}{n}} \dots n^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}}}{(n^{\frac{n+1}{n}})^{\frac{1}{n}}}$  کدام است؟

$e^{-\frac{1}{4}}$  (۱)

$e^{-\frac{1}{2}}$  (۲)

$e^{\frac{1}{4}}$  (۳)

$e^{\frac{1}{2}}$  (۴)

-۴۵ معادله‌های که از خط  $\begin{cases} 2x+z=1 \\ 2y+z=10 \end{cases}$  گذشته و بر رویه  $x^2+y^2+z^2=3$  مماس باشد عبارتست از:

$x+2y-z=1$  (۱)

$2x+2y+z=0$  (۲)

$x-2y+z=2$  (۳)

$2x+y+z=4$  (۴)

-۴۶ حاصل عبارت  $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} dy \int_0^{\sin^{-1}y} x dx + \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^1 dy \int_0^{\cos^{-1}y} x dx$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi - 1$  (۱)

$\frac{\pi}{4} - 1$  (۲)

$\frac{\pi}{4} + 1$  (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi + 1$  (۴)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{\gamma} + y^{\gamma}}{|x| + |y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

تابع -۴۷

مبدأ مختصات کدام است؟

(۱)  $-\frac{9}{25}$

(۲) صفر

(۳)  $\frac{9}{25}$

(۴) وجود ندارد.

$$\begin{cases} x^{\gamma} + y^{\gamma} = u \\ xsiny + y = v \end{cases} \quad \text{اگر} \quad -۴۸$$

(۱)  $\frac{x}{x^{\gamma} \cos y + x + y \sin y}$

(۲)  $x \cos y + 1$

(۳)  $\frac{x^{\gamma} \cos y + x + y \sin y}{-y}$

(۴)  $\frac{-y}{x^{\gamma} \cos y + x - y \sin y}$

$$f(x,y) = x^{\gamma} + y^{\gamma} \quad \text{ماکزیمم و مینیمم مقید تابع} \quad -۴۹$$

(۱)  $\text{Max } f = 0, \text{ Min } f = -10$

(۲)  $\text{Max } f = 10, \text{ Min } f = 0$

(۳)  $\text{Max } f = 20, \text{ Min } f = 0$

(۴)  $\text{Max } f = 0, \text{ Min } f = -20$

-۵۰ جرم کل چهار وجهی  $T$  با چگالی  $\rho(x,y,z) = \frac{16}{(1+x+y+z)^3}$  که در یک هشتمن اول قرار دارد و محدود به صفحه  $x+y+z=1$  و صفحات مختصات است برابر است با:

- (۱)  $8\ln 2 - 5$   
 (۲)  $5 - \ln 2$   
 (۳)  $5 + \ln 2$   
 (۴)  $8\ln 2 + 5$

-۵۱ حجم ناحیه توپر  $T$  که از بالا به کره  $x^r + y^r + z^r = a^r$  و از پایین به مخروط  $z = \sqrt{x^r + y^r} \cot \phi$  محدود می‌باشد ( $\phi$  زاویه بین مولدهای مخروط با محورها و  $\pi < \phi < 0$ ) برابر است با:

- (۱)  $\frac{2}{3}\pi a^r (1 + \cos \phi)$   
 (۲)  $\frac{2}{3}\pi a^r (1 - \cos \phi)$   
 (۳)  $\frac{4}{3}\pi a^r (1 - \cos \phi)$   
 (۴)  $\frac{4}{3}\pi a^r (1 + \cos \phi)$

-۵۲ فرض کنیم  $f(x)$  تابعی باشد که روی  $[a,b]$  پیوسته و دارای مشتق پیوسته باشد و علاوه بر این صورت مقدار  $\int_a^b (xf(x)f'(x))dx = 1$ ،  $f(a) = f(b) = 0$  برابر کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$   
 (۲)  $-\frac{3}{2}$   
 (۳)  $\frac{1}{2}$   
 (۴)  $\frac{3}{2}$

-۵۳ مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{rn}{rn-1} \right)^{rn+\sqrt{n}}$  کدام است؟

$$e^{-\frac{r}{r}} \quad (1)$$

$$e^{\frac{r}{r}} \quad (2)$$

$$\frac{r}{e^r} \quad (3)$$

$$e^{\frac{r}{r}} \quad (4)$$

-۵۴ ضریب جمله سوم بسط تیلور  $\frac{\ln(1-x)}{x-1}$  حول  $x=0$  برابر کدام است؟

$$-\frac{10}{6} \quad (1)$$

$$-\frac{11}{6} \quad (2)$$

$$\frac{10}{6} \quad (3)$$

$$\frac{11}{6} \quad (4)$$

-۵۵ بهترین مقدار تقریبی  $S$  برای  $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots + 1000^{10}$  کدام است؟

$$\frac{1000^{11}}{11} < S < 1000^{11} + \frac{1000^{11}}{11} \quad (1)$$

$$1000^{10} + 1 < S < 1000^{11} + \frac{1000^{11}}{11} \quad (2)$$

$$\frac{1000^{11}}{11} < S < 1000^{10} + \frac{1000^{11}}{11} \quad (3)$$

$$1000 < S < 1000^{10} + \frac{1}{10} \quad (4)$$

-۵۶ فرض کنید  $f$  تابعی پیوسته و دارای مشتق پیوسته و اکیداً صعودی روی  $[a, b]$  باشد و  $f(a) = f(b)$ . در این صورت برای

هر  $x \in [a, b]$   $\int_a^x f(t)dt + \int_x^b f^{-1}(t)dt$  برابر کدام است؟

$$xf'(x) \quad (1)$$

$$f(b) \quad (2)$$

$$xf(x) \quad (3)$$

$$xf^{-1}(x) \quad (4)$$

-۵۷ خط مماس بر منحنی فصل مشترک رویه‌های  $x^r + y^r = 1$  و  $Z = 1$  در نقطه  $(0, 1, 1)$  کدام است؟

$$y + z = 2 \quad (1)$$

$$x + y = 1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad (4)$$

-۵۸ کدام گزینه در مورد انتگرال ناسره (توسعی) صحیح است؟

(۱) واگرایست

(۲) همگرا با مقدار همگرایی  $\pi$  می‌باشد.

(۳) همگرا با مقدار همگرایی  $\frac{1}{\pi}$  می‌باشد.

(۴) همگرا با مقدار همگرایی یک می‌باشد.

-۵۹  $\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$  . مقدار  $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$  اگر

$$\frac{\beta(m, n)}{m^r} \quad (1)$$

$$\frac{\beta(m, n)}{r^n} \quad (2)$$

$$\frac{\beta(m, n)}{r^m} \quad (3)$$

$$\frac{\beta(m, n)}{r^{m+n}} \quad (4)$$

-۶۰ اگر تابع  $f$  به صورت  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^r - y^r}{x^r + y^r} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  بود

ترتیب عبارتند از: (منتظر از  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$  یعنی مشتق‌گیری نسبت به  $x$  و سپس نسبت به  $y$ )

(۱) ۱ و -۱

(۲) ۱ و -۱

(۳) ۱ و ۱

(۴) -۱ و -۱

$$F(t) = \begin{cases} \sin(t) & 0 < t < \pi \\ -\sin(t) & \pi < t < 2\pi \\ F(t + \pi) & \text{هر گاه} \end{cases}$$

-۶۱

$$\frac{re^{\pi s}}{(1+s^r)(e^{\pi s}-1)} \quad (1)$$

$$\frac{e^{\pi s}+1}{(1+s^r)(e^{\pi s}-1)} \quad (2)$$

$$\frac{re^{\pi s}-1}{(1+s^r)(e^{\pi s}-1)} \quad (3)$$

$$\frac{re^{\pi s}-1}{s(s^r+1)(1+e^{-\pi s})} \quad (4)$$

-۶۲ با جایگذاری  $t = e^x$  معادله دیفرانسیل  $y'' + \frac{1}{r}y' + e^x y = 0$  به کدام یک از معادلات زیر تبدیل می‌شود؟

$$(1-t)\frac{d^r y}{dt^r} + \left(\frac{r}{r} - t\right)\frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (1)$$

$$t(1-t)\frac{d^r y}{dt^r} + \left(\frac{r}{r} - t\right)\frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (2)$$

$$(1-t^r)\frac{d^r y}{dt^r} + \left(\frac{1}{r} - t\right)\frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (3)$$

$$(1-t^r)\frac{d^r y}{dt^r} + \left(\frac{r}{r} + t\right)\frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (4)$$

-۶۳ معادله  $xdx - ydy = 0$  مفروض است. هر گاه از یک نقطه دلخواه مانند P واقع روی یکی از منحنی‌های انتگرال معادل PT

را رسم کنیم و قرینه نقطه P را نسبت به محور x ها نقطه Q بنامیم، کدام گزینه صحیح است؟ (O مبدأ مختصات است).

(۱) بر PT عمود است.

(۲) بر OQ عمود نیست.

(۳) بر OQ عمود است.

(۴) مثلث POQ متساوی الاضلاع است.

- ۶۴ - جواب عمومی معادله  $y^r y' + rx y' - y = 0$  کدام است؟

$$rx^r = y - c^r \quad (1)$$

$$rx^r = y^r - c^r \quad (2)$$

$$rx = cy^r - c^r \quad (3)$$

$$rx^r = cy - c^r \quad (4)$$

- ۶۵ - جواب عمومی معادله زیر کدام است؟

$$\left( \frac{\ln(\ln y)}{x} + \frac{r}{r} xy^r \right) dx + \left( \frac{\ln x}{y \ln y} + x^r y^r \right) dy = 0$$

$$(\ln x)(\ln(\ln y)) + x^r y^r = c \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} \ln(\ln(y)) + \frac{1}{r} x^r y^r = c \quad (2)$$

$$\frac{1}{x} \ln(\ln y) + x^r y^r = c \quad (3)$$

$$(\ln x)(\ln(\ln y)) + \frac{1}{r} x^r y^r = c \quad (4)$$

- ۶۶ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $x(ydx + xdy) = (1 + x^r y^r) \ln x dx$  کدام است؟

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \frac{1}{r} (\ln y)^r + c \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}^{-1} y = \frac{1}{r} (\ln x)^r + c \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}^{-1}(xy) = \frac{1}{r} (\ln x)^r + c \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}^{-1}(xy) = \frac{1}{r} (\ln y)^r + c \quad (4)$$

- ۶۷

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر برابر است با:

$$(x^r + y^r)(x + yy') + (x^r + y^r - rx + ry)(y - xy') = 0$$

$$x^r + y^r + ry = c(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{\tan^{-1} x}{y}} \quad (1)$$

$$x^r + y^r - ry = c(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{\tan^{-1} y}{x}} \quad (2)$$

$$x^r + y^r - ry = c(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{\tan^{-1} x}{y}} \quad (3)$$

$$x^r + y^r + ry = c(x^r + y^r)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{\tan^{-1} y}{x}} \quad (4)$$

- ۶۸

جواب معادله  $x^r + y^r - 2xyy' = 0$  در صورتی که  $x$  به سمت صفر میل کند، کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

-  $\infty$  (۱)

صفر (۲)

- ۱ (۳)

$\infty$  (۴)

- ۶۹

جواب عمومی معادله زیر کدام است؟

$$y' = (x - y)(y - x + 1) + 1$$

$$y = \frac{1-x}{-1+ce^x} \quad (1)$$

$$y = \frac{1-x+cxe^x}{-x+ce^x} \quad (2)$$

$$y = \frac{1-x+cxe^x}{-1+ce^x} \quad (3)$$

$$y = \frac{1-ce^x}{1-x+cxe^x} \quad (4)$$

- ۷۰

جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $x^ry'' - rxyy' + y^r - e^ry' = 0$  کدام است؟

$$(y + e^{-x} + c)(y - e^{-x} + c) = 0 \quad (1)$$

$$(y + cx + e^c)(y + cx - e^c) = 0 \quad (2)$$

$$(y + e^x + c)(y - e^x + c) = 0 \quad (3)$$

$$(y - cx + e^c)(y - cx - e^c) = 0 \quad (4)$$

-۷۱ کدام گزینه جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $y^r y' dx = (x^r - xy) dy$  را نشان می‌دهد؟

$$x^r y^r \left( \frac{r}{r} y^{-r} + c \right) = 1 \quad (1)$$

$$y \left( \frac{r}{r} y^{-r} + c \right) = 1 \quad (2)$$

$$x \left( \frac{r}{r} y^{-r} + c \right) = 1 \quad (3)$$

$$xy \left( \frac{r}{r} y^{-r} + c \right) = 1 \quad (4)$$

در دستگاه -۷۲  $\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{rx} + \int_0^x \varphi_r(t) dt \\ \varphi_r(x) = 1 - \int_0^x e^{r(x-t)} \varphi_1(t) dt \end{cases}$

$-2-2e^x$  (۱)

$2e^x - 2e^{-x}$  (۲)

$+2+2e^{-x}$  (۳)

$-2+2e^x$  (۴)

-۷۳ جواب انتگرال زیر کدام است؟ (a ثابت مثبت و  $c > -1$  و n عددی مثبت و فرد می‌باشد.)

$$I = \int_0^\infty x^c e^{-ax^n} dx$$

$$\frac{1}{na^{\frac{c-n+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{c-n+1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{na^{\frac{n-c+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{c}\right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{na^{\frac{c+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{c+1}{n}\right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{na^{c+1}} \Gamma\left(\frac{c+rn-1}{n}\right) \quad (4)$$

- ۷۴ - حاصل کدام است که در آن  $\int_{-1}^1 (x - x^n) P_n(x) dx = 0$  چند جمله‌ای لزاندر از درجه  $n$  است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{1}{2}$
- (۳) صفر
- (۴) ۱

- ۷۵ - یک انتگرال خصوصی مربوط به متغیر وابسته  $x$  در دستگاه زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \gamma \frac{d^r x}{dt^r} + \frac{d^r y}{dt^r} + \alpha x + \beta y = -\lambda \sin \gamma t \\ \frac{d^r x}{dt^r} + \frac{d^r y}{dt^r} + \gamma x + \alpha y = \lambda \sin \gamma t \end{cases}$$

$$x_p(t) = \gamma \cos \gamma t \quad (۱)$$

$$x_p(t) = \gamma \sin \gamma t \quad (۲)$$

$$x_p(t) = \gamma \sin \gamma t + \cos \gamma t \quad (۳)$$

$$x_p(t) = \gamma \sin \gamma t \quad (۴)$$

- ۷۶ - معکوس تبدیل لاپلاس  $\{\sqrt{s+1} - \sqrt{s}\}$  کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} (1 + e^{-t}) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-t}) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-t}) \quad (۳)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} (1 + e^{-t}) \quad (۴)$$

- ۷۷ -  $x^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{x}$  دو جواب مستقل خطی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن هستند. ضریب مشتق مرتبه اول در این معادله

کدام است؟

$$\frac{1}{x^r} \quad (1)$$

$$x^r \quad (2)$$

$$x \quad (3)$$

$$\frac{1}{x} \quad (4)$$

- ۷۸ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$$x^r y'' = (y - xy')^r$$

$$y = \frac{x^r}{c_1 + c_r x} \quad (1)$$

$$y = \ln \left| \frac{x}{c_1 + c_r x} \right| \quad (2)$$

$$y = x \ln \left| \frac{x}{c_1 + c_r x} \right| \quad (3)$$

$$y = x + \ln \left| \frac{c_1 + c_r x}{x} \right| \quad (4)$$

- ۷۹ - با جایگذاری  $y^r = u$  معادله  $(xy' - y)^r = -x^r y y''$  به کدام معادله اویلر - کشی (هم بعدکشی) تبدیل می شود؟

$$rx^r u'' + xu' - u = 0 \quad (1)$$

$$x^r u'' - xu' + u = 0 \quad (2)$$

$$rx^r u'' - xu' - u = 0 \quad (3)$$

$$x^r u'' - rxu' + ru = 0 \quad (4)$$

-۸۰ جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $(x-1)y'' - xy' + y = 0$  کدام است؟

$$c_1 e^{-x} + c_2 x \quad (1)$$

$$c_1 x e^{-x} + c_2 e^x \quad (2)$$

$$c_1 e^x + c_2 x \quad (3)$$

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^x \quad (4)$$

-۸۱ جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0$  کدام گزینه است؟

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x^{-1} \quad (1)$$

$$y = c_1 x^r + c_2 x^{-1} \quad (2)$$

$$y = c_1 x^r + c_2 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 e^{-x} \quad (4)$$

-۸۲ فرض کنید  $t$  مماس بر منحنی  $c$  در نقطه  $p$  باشد. معادله خانواده‌ای از منحنی‌ها، با این خاصیت که فاصله مبدأ، تا مماس  $t$  مساوی طول نقطه  $p$  باشد، کدام است؟

$$x^r + y^r = cx \quad (1)$$

$$x^r + y = cx \quad (2)$$

$$x^r + y^r = cy \quad (3)$$

$$cx + y^r = y \quad (4)$$

-۸۳ بازه‌ای که در آن مسأله مقدار اوتیله زیر دارای جواب است کدام است؟

$$(x-4)y' + (\ln(x))y = 2x$$

$$y(2) = 2$$

$$(0, 4) \quad (1)$$

$$P^+ \quad (2)$$

$$(-1, 4) \quad (3)$$

$$(4, +\infty) \quad (4)$$

-۸۴ معادله دیفرانسیل  $f x^{\gamma} y'' + f x y' + (A x^{\gamma} - 1)y = 0$  مفروض است با فرض اینکه

$$J_{-\frac{1}{\gamma}}(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi x}} \cos x, J_{\frac{1}{\gamma}}(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi x}} \sin x$$

داده شده کدام است؟

$$y = A_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + A_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$y = A_1 \frac{\sin \sqrt{\gamma x}}{\sqrt{x}} + A_2 \frac{\cos \sqrt{\gamma x}}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$y = A_1 \frac{\sin \sqrt{x}}{x} + A_2 \frac{\cos \sqrt{x}}{x} \quad (3)$$

$$y = A_1 \frac{\sin \sqrt{\gamma x}}{x} + A_2 \frac{\cos \sqrt{\gamma x}}{x} \quad (4)$$

-۸۵ فرض کنید  $y = f(x, c)$  جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر باشد:

$$\frac{dy}{dx} + y = f \sin x$$

در این صورت  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, c)$

(۱) موجود نیست.

(۲) برابر  $\infty$  است.

(۳) برابر ۲ است.

(۴) برابر صفر است.

سطوح زیر متحضر نرمال استاندارد											مقدار بحرانی توزیع F											مقدار بحرانی توزیع کای										
z	0.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	df	.10	.05	.025	.01	.005	df	.995	.990	.975	.950	.050	.025	.010	.005							
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359	1	.3078	.6314	.1231	.3182	.6366	1	.4245	.00001	.00009	.00039	.38414	.50238	.63149	.7879							
0.1	.5198	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753	2	.1886	.2970	.4303	.6965	.9225	2	.0010	.00201	.00506	.01025	.59914	.73777	.92163	.10595							
0.2	.5793	.5812	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	3	.1353	.2353	.3182	.4341	.5841	3	.1638	.2158	.3518	.57147	.93484	.11344	.12818								
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517	4	.1333	.2132	.2776	.3747	.4604	4	.2036	.2971	.4844	.67107	.94877	.11143	.13276	.14660							
0.4	.6554	.6592	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	5	.1476	.2015	.2571	.3165	.4032	5	.4111	.5543	.83112	.1454	.11070	.12832	.15086	.16749							
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	6	.1440	.1943	.2447	.3143	.3707	6	.6715	.8770	.12373	.16353	.12373	.12591	.14449	.16811	.18547						
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	7	.1415	.1895	.2365	.2993	.3499	7	.0989	.12390	.15698	.21673	.14667	.16162	.18473	.20277							
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	8	.1397	.1840	.2306	.2895	.3355	8	.1344	.1797	.21796	.27356	.15507	.17534	.20700	.21954							
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	9	.1383	.1813	.2362	.2821	.3250	9	.1714	.20879	.23597	.29198	.19022	.21665	.23159	.25159							
0.9	.8159	.8186	.8211	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	10	.1372	.1812	.2228	.2764	.3169	10	.2155	.25582	.32469	.39403	.18307	.20483	.23109	.25148							
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	11	.1353	.1796	.2201	.2718	.3106	11	.2693	.30514	.38157	.45748	.19675	.215920	.24724	.26756							
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	12	.1336	.1782	.2179	.2681	.3055	12	.3073	.35703	.44037	.52260	.21026	.23335	.26216	.28299							
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015	13	.1319	.1771	.2160	.2650	.3012	13	.3565	.41069	.50847	.58918	.22362	.24735	.26368	.28919							
1.3	.9012	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177	14	.1345	.1761	.2145	.2624	.2977	14	.4074	.46604	.56287	.65706	.23484	.26118	.29141	.31319							
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9319	.9339	15	.1341	.1753	.2131	.2602	.2947	15	.4660	.52293	.62521	.72609	.24495	.27488	.30577	.32801							
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9430	.9441	16	.1337	.1746	.2120	.2583	.2921	16	.5142	.58122	.69076	.75616	.26296	.28845	.31599	.34267							
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9515	.9515	.9545	17	.1333	.1740	.2110	.2567	.2898	17	.5697	.64077	.75641	.86717	.27387	.30191	.33408	.35718							
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633	18	.1330	.1734	.2101	.2552	.2878	18	.6364	.73504	.82307	.93504	.28869	.31525	.34803	.37156							
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706	19	.1328	.1729	.2093	.2539	.2861	19	.6443	.75327	.89065	.10117	.30143	.32833	.36190	.38582							
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767	20	.1325	.1723	.2066	.2518	.2845	20	.7433	.83604	.95607	.11410	.31416	.37366	.416169	.47366							
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9803	.9808	.9812	.9817	.9821	21	.1323	.1711	.2060	.2518	.2831	21	.8023	.88972	.10282	.11591	.32670	.35478	.38932	.41461							
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857	22	.1321	.1717	.2074	.2508	.2819	22	.8642	.94424	.109812	.12338	.33624	.36780	.40289	.42795							
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9873	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890	23	.1319	.1714	.2069	.2500	.2807	23	.9162	.10193	.11488	.12090	.35172	.38073	.41618	.44181							
2.3	.9893	.9895	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916	24	.1318	.1711	.2064	.2492	.2797	24	.9486	.10856	.12401	.13848	.28418	.30364	.42879	.45558							
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936	25	.1316	.1708	.2060	.2483	.2787	25	.1032	.11523	.13119	.14611	.37652	.40646	.44314	.46917							
2.5	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952	.9953	.9955	26	.1315	.1706	.2056	.2479	.2779	26	.1116	.12184	.13579	.14885	.38885	.41923	.45641	.48289							
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964	27	.1314	.1703	.2052	.2477	.2777	27	.1140	.12878	.14573	.16151	.40113	.43104	.46962	.49644							
2.7	.9965	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974	.9974	28	.1313	.1701	.2048	.2467	.2763	28	.1246	.13564	.15307	.16927	.41237	.44466	.48278	.50993							
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981	.9981	29	.1311	.1699	.2045	.2462	.2756	29	.14256	.16047	.17708	.19453	.42556	.46477	.49587	.52375							
2.9	.9981	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986																							

-۸۶ اگر نمودار زیر نمایشی از نمودار ساقه و برگ (تنه و شاخه) داده‌ها باشد و  $Q_1$ ,  $Q_2$  و  $Q_3$  به ترتیب نمایانگر چارک اول، دوم

و سوم باشند، مقدار  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  کدام است؟

۹	۰	۲
۱۰	۰	۰
۱۱	۰	۲ ۵ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹
۱۲	۰	۰ ۱ ۵ ۵ ۵ ۹
۱۳	۰	۰

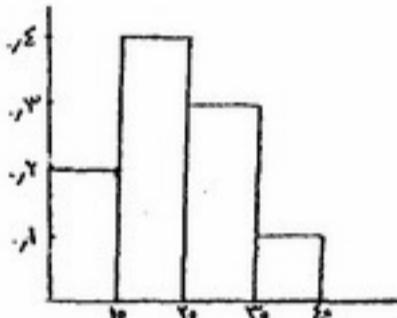
(۱)  $(109, 118, 121)$

(۲)  $(110, 117/5, 125)$

(۳)  $(112, 117/5, 121)$

(۴)  $(110, 117, 129)$

-۸۷ با توجه به هیستوگرام زیر مقدار میانه کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۹

(۴) ۱۷

-۸۸ ۲۵ مهره یکسان را می‌خواهیم در سه جعبه A، B و C قرار دهیم به طوری که در جعبه A حداقل یک مهره، در جعبه B حداقل ۲ مهره و در جعبه C حداقل ۳ مهره قرار گیرد. به چند طریق می‌توان اینکار را انجام داد؟

(۱) ۱۷۱

(۲) ۲۱۰

(۳) ۳۰۰

(۴) ۲۳۱

-۸۹ فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند. اگر احتمال اینکه B اتفاق نیافتد برابر با  $b$  و احتمال اینکه هیچ کدام اتفاق نیافتد برابر با  $a$  باشد. مقدار  $P(A)$  کدام است؟

$\frac{1-a}{1-b}$  (۱)

$\frac{1-b}{1-a}$  (۲)

$\frac{b}{1-a}$  (۳)

$\frac{a}{1-b}$  (۴)

- ۹۰ - یک تاس ۸ وجهی را هفت بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه ماکزیمم وجه ظاهر شده دقیقاً ۶ باشد کدام است؟

$$\frac{5^7}{8^7} \quad (1)$$

$$\frac{6^7}{8^7} \quad (2)$$

$$\frac{6^7 - 5^7}{8^7} \quad (3)$$

$$\frac{7^7 - 6^7}{8^7} \quad (4)$$

- ۹۱ - توپ یکسان و یک شکل را به تصادف در سه جعبه می‌ریزیم. فرض کنید  $X$  تعداد توپ‌های جعبه‌آم باشد و احتمال اینکه توپی در هر جعبه قرار گیرد برابر باشد. احتمال اینکه تعداد توپ‌های هر سه جعبه برابر باشند کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{27} \quad (2)$$

$$\frac{7!}{3^{10}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{6^9} \quad (4)$$

- ۹۲ - اگر  $X$  یک متغیر تصادفی برتوانی با پارامتر  $p$  باشد. مقدار  $\sum_{i=1}^n E(X^i)$  کدام است؟

$$np \quad (1)$$

$$(1+p)^n \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n p^i (1-p)^{n-i} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n p^i \quad (4)$$

- ۹۳ - فرض کنید  $X$  دارای توزیع پواسون با واریانس یک است. مقدار  $P(X^T = X)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}e^{-1}$
- (۲)  $\frac{1}{2}e^{-1}$
- (۳)  $2e^{-1}$
- (۴)  $e^{-1}$

- ۹۴ - فرض کنید  $E[(-1)^{X+10}]$ ،  $X \sim B\left(25, \frac{1}{2}\right)$  کدام است؟

- (۱) -1
- (۲) صفر
- (۳) +1
- (۴)  $\frac{1}{2}$

- ۹۵ - فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع هندسی یکسان با پارامتر  $p$  باشند. مقدار  $P[X = Y]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{q}{p+2q}$
- (۲)  $\frac{p}{rp+q}$
- (۳)  $\frac{q}{rp+q}$
- (۴)  $\frac{p}{p+2q}$

- ۹۶ -  $Y$  دارای توزیع  $\chi^2$  با واریانس ۴۰۰ می باشد. مقدار  $P(Y > 200)$  به تقریب کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲)  $\frac{1}{4}$
- (۳) یک
- (۴)  $\frac{1}{2}$

-۹۷- فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی احتمال‌های زیر باشند،

$$f_{X_2}(x) = \gamma e^{-\gamma x}, \quad x > 0 \quad \text{و} \quad f_{X_1}(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$

اگر  $P(X_{(1)} = X_1)$  مقدار  $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\}$  کدام است؟

(۱)

 $\frac{1}{3}$  (۲) $\frac{2}{3}$  (۳) $\frac{1}{2}$  (۴)

-۹۸- اگر  $X_1$  و  $X_2$  یک نمونه تصادفی دوتایی از توزیع کی دو ( $\chi^2$ ) با ۱۵ درجه آزادی باشد، مقدار  $P(X_1 < X_2)$  کدام است؟

 $\frac{1}{8}$  (۱) $\frac{1}{2}$  (۲) $\frac{7}{8}$  (۳)

(۴) هیچ کدام

-۹۹- فرض کنید  $X$  نمایانگر تعداد آزمایش‌های مستقل برنولی با احتمال  $Y$  تا حصول اولین موفقیت باشد متغیر تصادفی  $Y$  دارد

توزیع یکنواخت روی بازه  $[0, 1]$  باشد، مقدار  $Cov(X, Y)$  کدام است؟

 $1 - \frac{3}{2} \ln 2$  (۱) $1 - \frac{2}{3} \ln 2$  (۲) $\frac{3}{2} \ln 2$  (۳) $\frac{2}{3} \ln 2$  (۴)

- ۱۰۰ - اگر  $\bar{X}$  میانگین یک نمونه ۲۵ تایی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد. ضریب اطمینان فاصله اطمینان  $(\bar{X} - \mu, \bar{X} + \sigma)$  برای پارامتر  $\mu$  کدام است؟  $\Phi(2)$

$$2\Phi(2) - 1 \quad (1)$$

$$1 - 2\Phi(2) \quad (2)$$

$$\tau\Phi\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - 1 \quad (3)$$

$$1 - 2\Phi\left(\frac{\tau}{\delta}\right) \quad (4)$$

- ۱۰۱ - فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta-1)e^{-(\theta-1)x} & \theta > 1, x > 0 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

برآورده گشتاوری  $\theta$  کدام است؟

$$1 + \frac{1}{\bar{X}^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\bar{X}} \quad (2)$$

$$1 + \frac{1}{\bar{X}} \quad (3)$$

$$\bar{X} + 1 \quad (4)$$

- ۱۰۲ - فرض کنید تابع مولد گشتاور  $X$  برابر است با:

$$M(t) = \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{2t}$$

مقدار ( ) کدام است؟  $P(|X| \leq 1)$

$$\frac{3}{12} \quad (1)$$

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{7}{12} \quad (3)$$

$$\frac{6}{12} \quad (4)$$

- ۱۰۳ - اگر  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از  $X$  با تابع احتمال  $P[X = -1] = q$  و  $P[X = 1] = p$ , برآورد ماکزیمم درستنمایی  $p$  کدام است؟

$$\frac{1+\bar{X}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1-\bar{X}}{2} \quad (2)$$

$$1-\frac{\bar{X}}{2} \quad (3)$$

$$1+\frac{\bar{X}}{2} \quad (4)$$

- ۱۰۴ - در یک بورسی آماری، صفت مورد بررسی دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۵ است. اگر هدف از بررسی، آزمون  $H_0: \mu = 25$  در مقابل  $H_1: \mu = 27$  با احتمال خطای نوع اول ۵٪ و توان ۹۵٪ باشد، تعداد تقریبی نمونه تصادفی

کدام است؟

۶۸ (۱)

۸۲ (۲)

۹۶ (۳)

۹۱ (۴)

- ۱۰۵ - فرض کنید  $X$  دارای تابع احتمال زیر باشد:

$x$	۱	۲	۳
$f_\theta(x)$	$\frac{\theta}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1-\theta}{3}$

برای آزمون فرض  $H_0: \theta = \frac{2}{3}$ . اگر ناحیه بحرانی به صورت  $\{2, 3\}$  باشد، احتمال خطای نوع اول

( $\alpha$ ) و احتمال خطای نوع دوم ( $\beta$ ) کدام است؟

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{5}{9}, \frac{1}{9} \right) \quad (1)$$

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{5}{9}, \frac{2}{9} \right) \quad (2)$$

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{7}{9}, \frac{2}{9} \right) \quad (3)$$

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{8}{9}, \frac{2}{9} \right) \quad (4)$$

۱۰۶ - یک دنباله از آزمایش‌های مستقل برتوانی با احتمال موفقیت برابر  $0.2/0.5$  یا  $0.7/0$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $X$  تعداد آزمایش‌های لازم برای به دست آوردن اولین موفقیت باشد و علاقمند به آزمون  $H_0: p = 0.7$  در مقابل  $H_1: p \neq 0.7$  هستیم. فرض  $H_0$  رد می‌شود اگر و تنها اگر  $\geq 3$ ، مقدار احتمال خطای نوع I و II (به ترتیب از راست به چپ) کدام است؟  $(p + q = 1)$

$$q + pq + p^2q \quad 0.06 \quad (1)$$

$$q + pq \quad 0.07 \quad (2)$$

$$p + pq \quad 0.09 \quad (3)$$

$$p + pq + p^2q \quad 0.08 \quad (4)$$

۱۰۷ - در یک مدل رگرسیون خطی ساده  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ ، اگر بر اساس یک نمونه تصادفی ۱۲ تایی خلاصه اطلاعات زیر حاصل شود.

$$S_{XY} = 300, S_X^2 = 120, SSE = 240$$

برآورد به روش حداقل مربعات برای  $\hat{\beta}_1$  و مجموع مربعات کل کدام است؟

$$\hat{\beta}_1 = 1/5, S_Y^2 = 990 \quad (2)$$

$$\hat{\beta}_1 = 2/5, S_Y^2 = 990 \quad (4)$$

$$\hat{\beta}_1 = 2/5, S_Y^2 = 909 \quad (1)$$

$$\hat{\beta}_1 = 2/0, S_Y^2 = 99 \quad (3)$$

۱۰۸ - معادله خط رگرسیونی برآش شده به نقاط زیر از کدام نقطه می‌گذرد؟

X	-3	-2	1	1	1	2
Y	-5	-4	2	1	2	4

$$(0,1) \quad (1)$$

$$(0,0) \quad (2)$$

$$(1,0) \quad (3)$$

$$(1,1) \quad (4)$$

۱۰۹ - در یک مدل رگرسیون خطی ساده  $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$  که در آن Y متغیر پاسخ و X متغیر مستقل است. بر اساس یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی، خلاصه اطلاعات زیر حاصل شده است:

$$\bar{x} = 2, \bar{y} = 4, S_X^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 = 9, S_Y^2 = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 16, S_{XY} = -9$$

ضریب تعیین کدام است؟

$$\frac{9}{16} \quad (1)$$

$$\frac{16}{9} \quad (2)$$

$$\frac{7}{4} \quad (3)$$

$$\frac{6}{7} \quad (4)$$

- ۱۱۰ - در یک آزمون مشترک نمره درس سه گروه دانشجو با سه معلم متفاوت به شرح زیر است:

	گروه ۱	گروه ۲	گروه ۳
۴	۵	۹	
۷	۷	۵	
۲	۲	۷	
۴	۴	۳	
۷	۲	۶	

با فرض نرمال بودن داده‌ها و همگنی واریانس‌ها، مجموع مربعات خطا (SSE) و میانگین کل کدام است؟

- (۱)  $\frac{11}{4}$  و ۵
- (۲)  $\frac{12}{3}$  و ۵
- (۳)  $\frac{14}{3}$  و ۶
- (۴)  $\frac{12}{5}$  و ۶

۵۱  
C

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

صبح جمعه  
۸۹/۱۱/۲۹



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.  
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

## آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۰

### مجموعه ریاضی - کد ۱۲۰۸

مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

تعداد سوال: ۱۲۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	توابع مختلف	۲۰	۱	۲۰
۲	جبر (۱)	۲۰	۲۱	۴۰
۳	آنالیز ریاضی (۱)	۲۰	۴۱	۶۰
۴	آنالیز ریاضی (۲)	۲۰	۶۱	۸۰
۵	آنالیز عددی (۱)	۲۰	۸۱	۱۰۰
۶	جبر خطی	۲۰	۱۰۱	۱۲۰

بهمن ماه سال ۱۳۸۹

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

-۱ فرض کنید تابع تحلیلی و غیر ثابت  $f$  بر حوزه  $D$  در رابطه  $|f'(z) - 1| < 1$  صدق کند. در این صورت:

$$\forall z \in D \quad \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z) \quad (1)$$

$$\forall z \in D \quad \operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Im} f(z) \quad (2)$$

$$(\forall z \in D \quad \operatorname{Re} f(z) > 0) \text{ یا } (\forall z \in D \quad \operatorname{Re} f(z) < 0) \quad (3)$$

$$(\forall z \in D \quad \operatorname{Im} f(z) > 0) \text{ یا } (\forall z \in D \quad \operatorname{Im} f(z) < 0) \quad (4)$$

-۲ شعاع همگرای سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{i}{n}\right)^n \left(\frac{z+i}{2}\right)^n$  کدام است؟

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\infty \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

-۳ فرض کنید تابع  $f$  بر حوزه  $D$  تحلیلی باشد. در این صورت:

$$\left( \frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r} \right) |f(z)|^r = r |f'(z)|^r \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r} \right) |f(z)|^r = 2 |f'(z)|^r \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r} \right) |f(z)|^r = r |f'(z)|^r \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r} \right) |f(z)|^r = |f'(z)|^r \quad (4)$$

-۴ نگاشت  $w = \frac{1}{r} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  را به چه خمی می‌نگارد؟

$$|z| = \frac{1}{r} \left| r - \frac{1}{r} \right| \quad (1) \text{ دایره}$$

$$|z| = \frac{1}{r} \left( r + \frac{1}{r} \right) \quad (2) \text{ دایره}$$

$$b = \frac{1}{r} \left| r - \frac{1}{r} \right| \text{ و } a = \frac{1}{r} \left( r + \frac{1}{r} \right) \quad (3) \text{ بیضی به مرکز مبدأ و نیم قطرهای}$$

$$[1, -1] \text{ بر روی محور حقیقی} \quad (4) \text{ بازه}$$

مقدار انتگرال  $\int_{|z|=r} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z^r - 1} dz$  برابر است با:

(۱)  $-\pi i \sin 1$

(۲) صفر

(۳)  $\pi i \sin 1$

(۴)  $\pi i \sin 1$

فرض کنید  $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$  ( $z \neq 0$ ). شعاع دایره همگرایی بسط تیلور تابع  $f$  حول نقطه  $z=0$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲)  $\sqrt{1+4\pi^2}$

(۳)  $\infty$

(۴)  $2\pi$

فرض کنید  $f(z) = \frac{z}{z^r - rz + 3}$  کدام گزینه صحیح است؟

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-r}}{(z-1)^n} \quad (1)$$

$$f(z) = -\frac{1}{r(z-1)} - \frac{r}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-1}{r} \right)^n \quad (2)$$

$$f(z) = -\frac{1}{r(z-1)} + r \sum_{n=r}^{\infty} \frac{r^{n-r}}{(z-1)^{n+1}} \quad (3)$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + r \sum_{n=r}^{\infty} \frac{r^{n-r}}{(z-1)^n} \quad (4)$$

-۸ فرض کنید توابع  $f$  و  $g$  بر حوزه  $D$  تحلیلی باشند و به ازاء هر  $z \in D$  در این صورت به ازای هر  $z \in D$

$$|f'(z)| = |g'(z)| \quad (1)$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z) \quad (2)$$

$$e^{i \operatorname{Im} f(z)} = e^{i \operatorname{Im} g(z)} \quad (3)$$

$$e^{f'(z)} = e^{g'(z)} \quad (4)$$

سری لورن تابع  $f(z) = \frac{e^{z-1}}{z-1}$  در حوزه  $|z-1| < 2$  کدام است؟ -۹

$$f(z) = \frac{1}{\gamma(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\gamma^k} \frac{(z-1)^n}{(n+1-k)!} \quad (1)$$

$$f(z) = \frac{1}{\gamma(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{\gamma^k} \frac{(z-1)^n}{(n+1-k)!} \quad (2)$$

$$f(z) = \frac{1}{\gamma(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{\gamma^k} \frac{(z-1)^n}{(n+1-k)!} \quad (3)$$

$$f(z) = \frac{1}{\gamma(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{\gamma^k} \frac{(z-1)^n}{(n+1-k)!} \quad (4)$$

مانده تابع  $f(z) = \frac{z^\gamma + 1}{\sin z^\gamma}$  در  $z = 0$  کدام است؟ -۱۰

-۲ (۱)

-۱ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

مانده تابع  $f(z) = \frac{\sin \gamma z - \gamma \sin z}{(\sin z - z) \sin z}$  در نقطه  $z = 0$  برابر است با: -۱۱

-۲۴ (۱)

۰ (۲)

۲۴ (۳)

۱ (۴)

-۱۲ فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع تحلیلی و یک به یک بر حوزه  $D$  باشد که روی هر زیر مجموعه فشرده  $D$  به طور یکنواخت به تابع غیر ثابت  $f$  همگرا است. در این صورت:

(۱)  $f'$  هیچ صفری در  $D$  ندارد.

(۲)  $f$  هیچ صفری در  $D$  ندارد.

(۳) اگر هر  $f_n$  در  $D$  صفر داشته باشد آنگاه  $f$  نیز در  $D$  صفر دارد.

(۴) تعداد صفرهای  $f$  و  $f_n$  از مرتبه‌ای به بعد در  $D$  با هم برابرند.

-۱۳ فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع تمام باشند که به ازای هر  $z \in \mathbb{C}$   $|f(z)| \leq |g(z)|$ . در این صورت:

(۱)  $\frac{f}{g}$  یک تابع گویای غیر ثابت است.

(۲) که  $c = cg$  یک عدد ثابت است.

(۳) در درون هر خم ساده بسته تعداد صفرهای  $g$  و  $f + g$  با هم برابرند.

(۴) در درون هر خم ساده بسته تعداد صفرهای  $f$  از تعداد صفرهای  $g$  بیشتر است.

-۱۴ فرض کنید تابع  $f$  بر قرص بسته واحد  $1 \leq |z|$  تحلیلی باشد و به ازای هر  $z$  در دایره واحد،  $1 < |f(z)|$ .

در این صورت تابع  $(n \in \mathbb{N}) f^n$  بر قرص باز  $1 < |z|$  چند نقطه ثابت دارد؟

(۱)  $n$  نقطه

(۲) یک نقطه

(۳) نامتناهی

(۴) هیچ نقطه

-۱۵ فرض کنید  $f$  تابعی بر  $\mathbb{C}$  باشد که هیچ نقطه تکین اساسی (حتی در  $\infty$ ) ندارد. در این صورت:

(۱) نقطه‌های تکین  $f$  برداشتی هستند.

(۲) تابع  $f$  به صورت عکس یک تابع تحلیلی روی  $\mathbb{C}$  است.

(۳) هر بسط  $f$  به صورت سری توانی دارای تعدادی متناهی جمله است.

(۴) تعداد نقطه‌های تکین  $f$  متناهی است.

-۱۶ تعداد صفرهای چند جمله‌ای  $f(z) = z^7 + 5z^3 - z - 2$  در قرص باز واحد کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۷

(۴) ۵

۱۷ - مقدار انتگرال  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^r + 1)^{n+1}}$  کدام است؟

$$\frac{(2n)!}{(n!)^r} \frac{\pi}{\gamma^{2n+1}} \quad (1)$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^r} \frac{\pi}{\gamma^{n+1}} \quad (2)$$

$$\frac{(n)!}{\gamma(2n)!} \frac{\pi}{\gamma^{rn}} \quad (3)$$

$$\frac{(2n)!}{n!} \frac{\pi}{\gamma^{n+1}} \quad (4)$$

۱۸ - فرض کنید  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  دارای شعاع همگرانی ۱ باشد و  $\max_{|z|=1} |f(z)| = 1$ . در این صورت اگر  $z_0$  آنگاه:

$$|z_0| \leq \frac{|a_0|}{1+|a_0|} \quad (1)$$

$$|z_0| \geq \frac{|a_0|}{1+|a_0|} \quad (2)$$

$$|z_0| \leq \frac{|a_0|}{1+|a_0|} \quad (3)$$

$$|z_0| \geq \frac{|a_0|}{1+|a_0|} \quad (4)$$

۱۹ - فرض کنید  $f$  روی قرص باز واحد تحلیلی باشد. اگر به ازاء هر عدد طبیعی  $n$ ,  $\frac{1}{n+1} f(\frac{1}{n+1})$  حقیقی باشد آنگاه:

(۱) به ازاء هر عدد طبیعی  $n$ ,  $(0)^{(n)} f^{(n)}$  حقیقی است.

$$f(0) = 0 \quad (2)$$

(۳) به ازاء هر عدد طبیعی  $n$ ,  $(0)^{(2n-1)} f^{(2n-1)}$  حقیقی است و ممکن است  $(0)^{(2n)} f^{(2n)}$  حقیقی نباشد.

(۴) به ازاء هر عدد طبیعی  $n$ ,  $(0)^{(2n)} f^{(2n)}$  حقیقی است و ممکن است  $(0)^{(2n-1)} f^{(2n-1)}$  حقیقی نباشد.

۲۰ - فرض کنید تابع غیر ثابت  $f$  در  $|z-z_0| < r$  تحلیلی باشد. اگر  $z_0$  نقطه انباشتگی صفرهای  $f$  باشد:

آنگاه تابع  $f$  در نقطه  $z_0$ :

(۱) قطب دارد.

(۲) تحلیلی است.

(۳) تکین اساسی دارد.

(۴) تکین برداشتی دارد.

- ۲۱ فرض کنید  $G$  گروهی ۲۷ عضوی باشد در این صورت کدام گزینه صحیح است؟  
 ۱)  $G = G'$   
 ۲) گروهی آبلی است.  
 ۳) گروهی غیرآبلی است.  
 ۴) گروه  $Z(G)$  ناپذیری است.
- ۲۲ فرض کنید  $H \rightarrow G$  یک هم‌ریختی باشد و  $|G| = ۳۶$  و  $|H| = ۳۵$ . در این صورت کدام گزینه صحیح است?  
 ۱)  $\ker \varphi = G$   
 ۲)  $\ker \varphi = H$   
 ۳)  $\ker \varphi$  آبلی است.  
 ۴)  $\ker \varphi = 1$
- ۲۳ اگر  $G$  گروهی دلخواه باشد که  $G = Z(G)G'$  در این صورت کدام گزینه صحیح است?  
 ۱)  $G' = G''$   
 ۲) گروهی آبلی است.  
 ۳) گروهی غیرآبلی است.  
 ۴)  $\frac{G}{Z(G)}$  گروهی آبلی است.
- ۲۴ گروه خودریختی‌های داخلی  $S_7 \times \mathbb{Z}$  با کدام گزینه یکریخت است?  
 ۱)  $S_7$   
 ۲)  $\mathbb{Z}_7$   
 ۳)  $S_7 \times \mathbb{Z}_7$   
 ۴)  $S_7 \times \mathbb{Z}_2$
- ۲۵ فرض کنید  $G$  یک گروه دلخواه و  $H$  گروهی آبلی باشد، اگر  $f: G \rightarrow H$  یک هم‌ریختی باشد کدام گزینه صحیح است?  
 ۱)  $G' \subseteq \ker f$   
 ۲) گروهی آبلی است.  
 ۳)  $\ker f$  گروهی آبلی است.  
 ۴)  $G'$  گروهی آبلی است.
- ۲۶ فرض کنید  $G$  گروهی ۱۰ عضوی است در این صورت کدام گزینه صحیح است?  
 ۱)  $G$  با زیرگروهی از  $\mathbb{Z}_{100}$  یکریخت است.  
 ۲)  $G$  با زیرگروهی از  $S_{10}$  یکریخت است.  
 ۳)  $G$  با زیرگروهی از  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_\lambda$  یکریخت است.
- ۲۷ فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:  

$$N(R) = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}; x^n = 0\}$$
 تعداد اعضای  $N(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_\lambda)$  کدام است؟ (۱) حلقة اعداد گویا  
 ۱) ۲  
 ۲) ۴  
 ۳) ۶  
 ۴) ۸
- ۲۸ تعداد عناصر مرتبه  $p^m$  در گروه دوری مرتبه  $p^n$  چند تاست؟ ( $p$  عدد اول است و  $0 < m < n$ ).  
 ۱)  $p^{n-m}$   
 ۲)  $p^m - p^{m-1}$   
 ۳)  $p^n - p^{m-1}$   
 ۴)  $p^n - p^m$

- ۲۹ فرض کنید  $R$  یک حلقه،  $I$  ایده‌آل چپ حلقه  $R$  و  $J$  ایده‌آل راست حلقه  $R$  باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟
- $I \cap J$  ایده‌آلی دو طرفه از  $R$  است.
  - $I + J$  ایده‌آلی دو طرفه از  $R$  است.
  - $IJ$  ایده‌آلی دو طرفه از  $R$  است.

- ۳۰ کدام عدد نمی‌تواند مرتبه یک عنصر گروه  $S_{10}$  باشد؟

- ۲۰ (۲)
- ۲۱ (۴)
- ۲۲ (۱)
- ۲۳ (۳)

- ۳۱ فرض کنید  $G$  یک گروه و  $H$  زیر گروه  $G$  باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟
- $Z(H)$  زیر گروهی از  $Z(G)$  است.
  - $Z(H) \triangleleft G$
  - $Z(H) = H \cap Z(G)$

- ۳۲ اگر  $G$  یک گروه دوری از مرتبه  $p^{\delta}$  (یک عدد اول) باشد آنگاه مرتبه گروه خودریختی های  $G$  برابر است با:

- $p^{\delta} - p^{\frac{\delta}{2}}$  (۲)
- $p^{\delta} - p$  (۴)
- $p^{\delta} - p^{\frac{\delta}{2}}$  (۳)

- ۳۳ فرض کنید  $S \cdot S = \begin{bmatrix} a & b \\ -cb & a \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \}$ . در این صورت در مورد  $S$  چه می‌توان گفت؟

- $S$  حلقه نیست.
- $S$  تحت ضرب گروه است.
- $S$  یک میدان است.

- ۳۴ به ازای چه عناصر  $a \in \mathbb{Z}_7[x]$  حلقة  $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^7 + x^5 + ax + 1)}$  میدان است؟

- $a \in \{1, 2\}$  (۲)
- $a = 1$  (۴)
- $a = 0$  (۱)
- $a = 2$  (۳)

- ۳۵ فرض کنید  $G$  یک گروه است که  $|G| = 140$  و  $N$  زیر گروه نرمالی از  $G$  باشد به طوری که  $|N| = 14$ . فرض کنید  $g \in G$  و  $g^7 = 1$ .

- $g \in N$  (۱)
- $g$  عنصری از مرتبه ۵ ندارد. (۲)
- $N$  دوری است. (۳)

- ۳۶ فرض کنید  $G$  یک گروه است و  $a, b \in G$ . کدام گزاره درست نمی‌باشد؟
- $o(ab) = o(ba)$  (۱)

- $o(a) = o(b^{-1}ab)$  (۲)

- اگر  $a$  و  $b$  از مرتبه متناهی باشند آنگاه  $ab$  نیز از مرتبه متناهی است. (۳)
- اگر  $a$  تنها عضو از مرتبه ۲ در  $G$  باشد آنگاه  $a \in Z(G)$ . (۴)

- ۳۷ - کدام گزینه یک ریختی حلقه‌ای نمی‌باشد؟

$$\mathbb{Z}_\gamma \times \mathbb{Z}_\gamma \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_\gamma \right\} \quad (۱)$$

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n \quad (۲)$$

$$\mathbb{Z}(\sqrt{2}) \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & \sqrt{2}b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \quad (۳)$$

- ۳۸ - چند گروه متناهی وجود دارد که دقیقاً ۳ رده تزویجی داشته باشد به طوری که حداقل ۲ رده تزویجی از آن یک عضوی باشند؟

- ۱ (۲)  
۲ (۴)

- ۱ (۱)  
۲ (۳)

- ۳۹ - فرض کنید  $|G| = 2m$  که  $m$  عددی فرد است. فرض کنید  $k$  تعداد رده‌های تزویجی  $G$  باشد و  $k > m$  در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

$$|Z(G)| = 1 \quad (۱)$$

(۴) هر عضو غیرهمانی  $G$  از مرتبه ۳ است.

$$Z(G) = G' \quad (۱)$$

$$|Z(G)| \geq 3 \quad (۳)$$

- ۴۰ - فرض کنید  $G$  گروهی متناهی باشد و به ازای هر  $y \in G$ ،  $x \in G$ ، موجود باشد به طوری که  $y^x = x^{-1}$ . در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- (۲)  $G$  گروه بدیهی است.  
(۴) مرتبه  $G$  فرد است.

- (۱) مرتبه  $G$  زوج است.  
(۳)  $G$  دوری است.

-۴۱ فرض کنید  $x_1 > \sqrt{2}$  و به ازای هر  $n$ . در این صورت:

$$\lim x_n = \sqrt{2} \quad (1)$$

(۲) دنباله  $\{x_n\}$  حد ندارد.

$$\lim x_n = -\sqrt{2} \quad (3)$$

(۴) دنباله  $\{x_n\}$  واگرای به  $+\infty$  است.

-۴۲ فرض کنید  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک باشند و  $f: X \rightarrow Y$  تابعی پیوسته و یک به یک باشد. در این صورت تابع

$$f^{-1}: f(X) \rightarrow X$$

(۱) پیوسته است اگر  $X$  کران‌دار باشد.

(۲) یکنواخت پیوسته است.

(۳) پیوسته است اگر  $X$  فشرده باشد.

(۴) تابعی کران‌دار است ولی ممکن است پیوسته نباشد.

-۴۳ فرض کنید  $\alpha = \inf A$  و  $\beta = \sup A$ ،  $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n\sqrt{2}} - \frac{(-1)^m}{(2m-1)\sqrt{2}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

$$\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\beta = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

- ۴۴ - مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}}{n}$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{e}{2}$
- (۲)  $\frac{2}{e}$
- (۳)  $\frac{e}{4}$
- (۴)  $\frac{4}{e}$

- ۴۵ - بازه همگرایی سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$  کدام است؟

- (۱)  $[-e, e]$
- (۲)  $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$
- (۳)  $(-e, e)$
- (۴)  $[-e, e)$

- ۴۶ - فرض کنید  $(X, d)$  فضای متریک گسسته باشد. کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

- (۱) هر  $E \subseteq X$  باز است.
- (۲) برای هر  $E \subseteq X$  داریم  $E' = E$ .
- (۳) هر  $E \subseteq X$  پسته است.
- (۴) برای هر  $E \subseteq X$  داریم  $\bar{E} = E^\circ$ .

- ۴۷ - اگر  $(X, d)$  یک فضای متریک و  $A \subseteq X$  فشرده و  $B \subseteq X$  باز باشد آنگاه:

(۱)  $A \cup \bar{B}$  فشرده است.

(۲)  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  فشرده است.

(۳)  $A \setminus \bar{B}$  فشرده است.

(۴)  $\bar{A}^\circ \setminus B$  فشرده است، که در آن  $A^\circ$  مجموعه نقاط درونی  $A$  است.

-۴۸- فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک و  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله‌ای از مجموعه‌های ناتهی در  $X$  باشد به طوری که

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset. \text{ تحت کدام شرط } I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

(۱)  $I_n$  فشرده و بقیه  $I_n$  ها بسته باشند.

(۲)  $I_n$  ها باز و کراندار باشند.

(۳)  $I_n$  ها بسته و کراندار باشند.

(۴) هیچ کدام

-۴۹- فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای همبند در یک فضای متریک و  $B \subseteq A'$  (مجموعه نقاط حدی  $A$  است). در این صورت، کدام مجموعه همبند است؟

(۱)  $A^\circ$

(۲)  $\overline{A} - B$

(۳)  $\overline{A} - A$

(۴)  $A \cup B$

-۵۰- کدام تابع بر دامنه داده شده یکتاخت پیوسته است؟

$$\mathbb{R} \ni f(x) = e^x \quad (۱)$$

$$[0, +\infty) \ni f(x) = e^{-x} \quad (۲)$$

$$\mathbb{R} \ni f(x) = x^2 \quad (۳)$$

$$(0, +\infty) \ni f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (۴)$$

-۵۱- در  $\mathbb{R}$  با متریک اقلیدسی کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $\mathbb{R} \subseteq E \neq \emptyset$  حداکثر شمارا باشد آنگاه  $\mathbb{R} \setminus E$  ناهمبند است.

(۲) اگر  $\mathbb{R} \subseteq E \neq \emptyset$  و  $E^\circ = \emptyset$  آنگاه  $E$  در  $\mathbb{R}$  چگال است.

(۳) هر مجموعه همبند ناتهی بسته  $E$  در  $\mathbb{R}$  کامل (perfect) است ( $E' = E$ ).

(۴) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  همبند و حداقل دو عضو داشته باشد آنگاه  $E' = \overline{E}$ .

-۵۲- فرض کنید  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$  در این صورت دنباله  $\{a_n\}$ :

- (۱) یکنوا و کراندار است.
- (۲) یکنوا نیست ولی کراندار است.
- (۳) یکنواست ولی کراندار نیست.
- (۴) هیچ زیر دنباله همگرایی ندارد.

-۵۳- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^n)^{\alpha} - 1$  همگرایست اگر و تنها اگر:

- (۱)  $\alpha < -1$
- (۲)  $\alpha < 0$
- (۳)  $-1 \leq \alpha$
- (۴)  $0 < \alpha < 1$

-۵۴- فرض کنید ضرایب سری توانی  $\sum a_n z^n$  اعداد صحیحی باشند که تعداد نامتناهی از آنها ناصلفند. در این صورت:

- (۱) سری در  $(-\infty, +\infty)$  همگرایست.
- (۲) شعاع همگرایی آن حداقل یک است.
- (۳) شعاع همگرایی آن حداقل یک است.
- (۴) سری فقط در  $z = 0$  همگرایست.

-۵۵- فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک،  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته و  $E \subseteq X$  همبند باشد. در این صورت:

- (۱) اگر  $E$  بسته باشد آنگاه  $f(E)$  یک بازه بسته در  $\mathbb{R}$  است.
- (۲) اگر  $E$  باز باشد آنگاه  $f(E)$  یک بازه باز در  $\mathbb{R}$  است.
- (۳) اگر  $f(E)$  حداقل شمارا باشد آنگاه  $f|_E$  ثابت است.
- (۴)  $f^{-1}(f(E))$  همبند است.

-۵۶- فرض کنید  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی مشتق پذیر باشد. در این صورت 'f'

- (۱) پیوسته است.
- (۲) کران دار است.
- (۳) یکنوا است.
- (۴) دارای ویژگی مقدار میانی است.

-۵۷- اگر تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته و بر  $(\alpha, \infty)$  مشتق پذیر باشد و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(\alpha) = \infty$  آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f'(x) = \infty \quad (1)$$

(۲) عددی مانند c در  $(\alpha, \infty)$  هست که

(۳) تابع f بر  $(\alpha, \infty)$  یکنواست.

(۴) بر  $(\alpha, \infty)$  بیکران است.

-۵۸- تابع f با فاصله زیر تعریف می شود:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & x \in Q \\ x^r + x + 1 & x \notin Q \end{cases}$$

در این صورت:

(۱) تابع f در تمام نقاط گویا پیوسته است.

(۲) تابع f در مبدأ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

(۳) مجموعه نقاط ناپیوستگی f ناشمار است.

(۴) تابع f همه جا مشتق چپ و راست دارد.

-۵۹- فرض کنید تابع حقیقی f بر بازه  $[a, b]$  تعریف شده باشد. گوئیم f در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha > 0$  بر  $[a, b]$  صدق می کند در صورتی که عددی ثابت مانند A وجود داشته باشد به قسمی که ازای هر  $x, y$  در  $[a, b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq A |x - y|^\alpha$$

(۱)  $\sqrt{x}$  بر  $[0, 1]$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha$  به ازای  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$  صدق می کند.

(۲)  $\sqrt{x}$  بر  $[0, 1]$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha$  به ازای  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$  صدق می کند.

(۳) عدد  $\alpha < 1$  وجود دارد به قسمی که  $\sqrt{x}$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha$  بر  $[0, 1]$  صدق می کند.

(۴) هیچ  $0 < \alpha < 1$  وجود ندارد که  $\sqrt{x}$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه  $\alpha$  بر  $[0, 1]$  صدق کند.

-۶۰- کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) اگر تابع حقیقی  $f$  بر  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $f'$  بر  $\mathbb{R}$  در شرط لیپ شیتس از مرتبه اول صدق می‌کند.
- (۲) اگر  $f$  یک تابع حقیقی پیوسته و یک به یک بر یک بازه باشد آنگاه  $f$  اکیداً یکنوا است.
- (۳) اگر  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک و  $X \subseteq K$  فشرده و  $K \rightarrow Y$  :  $f$  یک به یک و پیوسته باشد آنگاه  $f^{-1}$  بر  $f(K)$  پیوسته است.
- (۴) تابعی وجود دارد که فقط در دو نقطه پیوسته است ولی در یکی از این نقاط مشتق دارد و در دیگری مشتق ندارد.

-۶۱- فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یکنواخت پیوسته باشد و  $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ . در این صورت دنباله  $\{f_n\}$

- (۱) به طور نقطه‌ای همگراست ولی این همگرایی یکنواخت نیست.
- (۲) یکنواخت کراندار است.
- (۳) فقط در بازه‌های کراندار یکنواخت همگراست.
- (۴) یکنواخت همگراست.

-۶۲- فرض کنید  $f$  و  $\alpha$  بر  $[a, b]$  توابعی کراندار،  $\alpha$  صعودی و  $c$  نقطه ثابتی از  $(a, b)$  باشد. در این صورت:

(۱) اگر  $f$  در  $C$  ناپیوسته و  $\alpha$  در  $C$  پیوسته باشد یا  $f$  در  $C$  پیوسته و  $\alpha$  در  $C$  ناپیوسته باشد آنگاه  $f \in R(\alpha)$  بر

(۲) اگر  $f$  و  $\alpha$  هر دو در  $C$  از راست ناپیوسته باشند آنگاه  $f \notin R(\alpha)$  بر

(۳) فقط اگر  $f$  در  $C$  پیوسته و  $\alpha$  در  $C$  ناپیوسته باشد آنگاه  $f \in R(\alpha)$  بر

(۴) اگر  $f$  و  $\alpha$  هر دو در  $C$  ناپیوسته باشند آنگاه  $f \notin R(\alpha)$  بر

$$\text{آنگاه: } \alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0) \\ 1 & x \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ 1 & x \in (0, 1] \end{cases} \quad -63$$

اگر  $f \notin R(\alpha)$  (۱)

$$\int_{-1}^1 f d\alpha = 1 \quad (۲)$$

$$\int_{-1}^1 f d\alpha = 2 \quad (۳)$$

$$\int_{-1}^1 f d\alpha = 0 \quad (۴)$$

-۶۴- تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  داده شده به طوری که به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم  $f(f(x)) = -x$ . در این صورت تابع  $f$

- (۱) همه جا پیوسته است ولی همه جا مشتق‌پذیر نیست.
- (۲) همه جا مشتق‌پذیر است.
- (۳) حداقل در یک نقطه ناپیوسته است.
- (۴) یکنواخت.

۶۵- فرض کنید بر  $[0,1]$ .  $f_n(x) = \frac{\sin x(\cos x)^n}{1+nx}$ . در این صورت دنباله  $\{f_n\}$  بر بازه  $[0,1]$ :

- (۱) یکنواخت کران دار نیست.
- (۲) یکنواخت همگراست.
- (۳) یکنواخت همگرا نیست ولی زیر دنباله‌ای یکنواخت همگرا دارد.
- (۴) هیچ زیر دنباله یکنواخت همگرا ندارد.

۶۶- تابع پیوسته  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  مفروض است و در شرط  $\int_{-1}^1 g(x)f(x)dx = 0$  به ازای هر  $g$  از رده A از توابع حقیقی بر

$[-1,1]$  صدق می‌کند. رده A گزینه باشد تا صفر بودن تابع f را تضمین کند؟

- (۱) رده چند جمله‌ای‌ها
- (۲) رده توابع زوج
- (۳) رده توابع خطی (درجه اول)
- (۴) رده توابع فرد

۶۷- تابع  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  مفروض است. در این صورت:

- (۱) ممکن است  $|f|$  با تغییر کران دار باشد ولی f با تغییر کران دار نباشد.
- (۲) اگر f با تغییر کران دار باشد پیوسته است.
- (۳) اگر f روی بازه باز  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشد آنگاه f با تغییر کران دار است اگر و تنها اگر دارای مشتق کران دار باشد.
- (۴) f با تغییر کران دار است اگر و تنها اگر یکنوا باشد.

۶۸- اگر  $x$  «جزء صحیح x» باشد، مقدار  $\int_0^2 (x^2 + 1)d([x])$  کدام است؟

- (۱) ۲۰
- (۲) ۱۴
- (۳) ۱۷
- (۴) ۰

- ۶۹- فرض کنید  $(f_n(x))$  کدام گزینه درست است؟

- ۱) هم دنباله  $\{f'_n\}$  و هم دنباله  $\{\int f'_n\}$  بر بازه‌های کران‌دار یکنواخت همگرا هستند.
- ۲) دنباله  $\{\int f'_n\}$  بر بازه‌های کران‌دار و دنباله  $\{f_n\}$  بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت همگراست.
- ۳) دنباله  $\{f_n\}$  فقط بر بازه‌های کران‌دار به  $|x|$  یکنواخت همگراست.
- ۴) دنباله  $\{f_n\}$  بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت همگراست.

- ۷۰- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$

- ۱) در بخشی از نقاط همگرا نیست.
- ۲) بر  $[0, 1]$  یکنواخت همگراست ولی بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت همگرا نیست.
- ۳) بر  $\mathbb{R}$  به طور نقطه‌ای همگراست ولی این همگرایی یکنواخت نیست.
- ۴) بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت همگراست.

- ۷۱- فرض کنید بر بازه بسته  $[a, b]$   $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  و  $f_n(x) = \frac{[nx]}{n^2}$ . در این صورت:

- ۱) مجموعه ناپیوستگی‌های هر  $f_n$  متناهی است ولی مجموعه ناپیوستگی‌های  $f$  شماراست.
- ۲) سری  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  نه تنها بر  $[a, b]$  بلکه بر  $\mathbb{R}$  به طور یکنواخت به  $f$  همگراست.
- ۳) مجموعه ناپیوستگی‌های توابع  $f_n$  و  $f$  تمام اعداد گویای بازه  $[a, b]$  است.
- ۴) با اینکه  $\int_a^b f(x) dx$  بر  $[a, b]$  یکنواخت همگراست اما موجود نیست.

- ۷۲- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

- ۱) در  $\mathbb{R}$  نقطه به نقطه و در بازه‌های کران‌دار یکنواخت همگراست.
- ۲) در  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  یکنواخت همگراست.
- ۳) در هر بازه بسته که در آن مضربی از  $2\pi$  وجود نداشته باشد، یکنواخت همگراست.
- ۴) در هر بازه‌ای مانند  $[a, b]$  یکنواخت همگراست.

- ۷۳ فرض کنید  $\{r_n\}$  دنباله اعداد گویای  $[0, 1]$  باشد و قرار دهد  $f$  بر  $[0, 1]$  پیوسته باشد.

آن گاه  $\int_0^1 f d\alpha$  برابر است با:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{\gamma^n}\right)(\alpha(r_{n+1}) - \alpha(r_n)) \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^n} f(r_n) \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma^n} - \frac{1}{\gamma^{n+1}}\right) f(r_n) \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n f\left(\frac{1}{\gamma^n}\right) \quad (4)$$

- ۷۴ فرض کنید دنباله  $\{f_n\}$  بر مجموعه  $E \subseteq \mathbb{R}$  به تابع  $f$  یکنواخت همگرا باشد. اگر  $\#$

- ۱) در نقطه‌ای مانند  $a$  از  $E$  ناپیوسته باشد، آنگاه مجموعه  $\{f_n\}$  در  $a$  ناپیوسته است:  $n$  نامتناهی است.
- ۲) پیوسته باشد از مرتبه‌ای به بعد تمام  $f_n$  ها پیوسته‌اند.
- ۳) در نقطه‌ای ناپیوسته باشد تمام  $f_n$  ها در آن نقطه ناپیوسته‌اند.
- ۴) پیوسته باشد تمام  $f_n$  ها پیوسته‌اند.

- ۷۵ فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته با تعداد متناهی صفر باشد،  $0 = f(a) = f(b)$ . در این صورت

کدام گزینه در حالت کلی صحیح است؟

- ۱) تعداد صفرهای  $f$  بیشتر از تعداد صفرهای  $g$  است.
- ۲) تعداد صفرهای  $g$  بیشتر یا مساوی تعداد صفرهای  $f$  است.
- ۳) تعداد صفرهای  $g$  کمتر از تعداد صفرهای  $f$  است.
- ۴) تعداد صفرهای  $g$  کمتر یا مساوی تعداد صفرهای  $f$  است.

- ۷۶ - فرض کنید  $f$  تابعی مشتق پذیر بر  $[0,1]$  باشد که  $f'$  یک به یک است. در این صورت:

- (۱) ممکن است  $f'$  پیوسته نباشد ولی به هر حال مجموعه نقاط ناپیوستگی  $f$  شماراست.
- (۲) ممکن است  $f'$  در هیچ نقطه‌ای پیوسته نباشد.
- (۳) تابع  $f'$  در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند ولی ممکن است پیوسته نباشد.
- (۴) تابع  $f'$  پیوسته یکنواخت است.

- ۷۷ - فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع باشد که بر  $[0,1]$  به طور نقطه‌ای به تابع  $f$  همگراست. در این صورت اگر حرف  $\mathbb{u}$  به مفهوم همگرایی یکنواخت باشد آنگاه:

- (۱) حتی اگر  $f$  بر  $[0,1]$  و بدایم که  $f_n$ ها پیوسته‌اند، در حالت کلی نمی‌توان لزوماً نتیجه گرفت که  $f_n \xrightarrow{\mathbb{u}} f$  بر  $[0,1]$ .
- (۲) اگر  $f$  بر  $[0,1]$  آنگاه  $f_n \xrightarrow{\mathbb{u}} f$  بر  $[0,1]$ .
- (۳) اگر  $f$  بر  $[0,1]$  آنگاه تنها در صورتی می‌توان نتیجه گرفت  $f_n \xrightarrow{\mathbb{u}} f$  بر  $[0,1]$  که بدایم  $f_n$ ها و  $f$  پیوسته‌اند.
- (۴) اگر  $f$  بر  $[0,1]$  آنگاه  $f$  انتگرال پذیر است.

- ۷۸ - فرض کنید تابع  $f$  بر  $[0,1]$  به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x = 0 \\ m \sin \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \quad (n, m) = 1 \end{cases}$$

در این صورت:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \quad (1)$$

(۲) تابع  $f$  در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست و لذا  $\int_0^1 f(x) dx$  موجود نیست.

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \text{ و } \int_0^1 f(x) dx = 0 \quad (2)$$

(۴) حد تابع  $f$  در نقاط گنگ موجود است ولی در نقاط گویا موجود نیست.

-۷۹ - سری  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x^n)x^n$  بر بازه  $[0,1]$  داده شده است. فرض کنید به ازای هر  $n \leq 0$  و هر  $x \in [0,1]$ .

$$f_n(x) = (1-x^n)x^n$$

(۱) بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا نیست اما سری یکنواخت همگراست.

(۲) و سری هیچ کدام بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا نیستند.

(۳) بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا است اما سری بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا نیست.

(۴) و سری هر دو بر  $[0,1]$  یکنواخت همگرا هستند.

-۸۰ - فرض کنید تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$  با ضابطه  $f(x) = [x] - 2x$  تعریف شده باشد. در این صورت:

(۱) تابع تغییر کل  $f$  بر بازه  $[-1,1]$  مقدار ثابتی است.

(۲) تغییر کل  $f$  بر بازه  $[-1,0]$  برابر ۲ است.

(۳) تغییر کل  $f$  بر بازه  $[-1,1]$  برابر ۶ است.

(۴)  $f$  با تغییر کران دار نیست.

-۸۱ در یک دستگاه معیز شناور نرمال شده برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۸ با ۳ رقم در مانتیس و روش بریدن، فاصله بین عدد قابل نمایش  $1 \times 8^k$  و نزدیکترین عدد قابل نمایش دیگر چقدر است؟

- $8^{k-2}$  (۱)
- $8^{k-4}$  (۲)
- $8^{k-3}$  (۳)
- $8^{k-5}$  (۴)

-۸۲ فرض کنید  $a$  و  $b$  به ترتیب تقریب‌هایی دلخواه از  $A$  و  $B$  باشند. یک کدام بالا برای  $|A \times B - a \times b|$  کدام است؟

- $2 \times 10^{-1}$  (۱)
- $1,5 \times 10^{-2}$  (۲)
- $10^{-2}$  (۳)
- $2 \times 10^{-2}$  (۴)

-۸۳ برای کدام یک از ماتریس‌های نامنفرد  $A$ ،  $n \times n$ ، تعداد عملیات ضرب لازم برای بد دست آوردن جواب دستگاه  $Ax = b$  برابر  $O(n)$  است؟

- (۱) متقارن
- (۲) متقارن و معین مثبت
- (۳) پایین مثلثی
- (۴) سه قطری

-۸۴ فرض کنید  $p(x)$  چند جمله‌ای درونیاب تابع  $f$  در نقاط  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$  باشد و  $p(2) = 5$ . اگر  $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = (2, 2)$  کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

-۸۵ تخمین  $f(x) = x \ln x$  در بازه‌ی  $[1, 2]$  با توابع تکمای خطی مدنظر است. تعداد زیر بازه‌های مساوی در این بازه حداقل چقدر باشد تا کران بالای خطای برشی تخمین‌ها در این بازه کمتر از  $2 \times 10^{-4}$  شود؟

- ۵۰ (۱)
- ۲۵ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۱۰۰ (۴)

-۸۶ فرض کنید  $f(x) = x - \tan x$ . می‌دانیم که  $f(x) = x^m g(x)$ . که در آن  $g(0) \neq 0$ . عدد  $m$  کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۱ (۴)

-۸۷ فرض کنید  $p(x)$  چند جمله‌ای درونیاب از درجه کوچکتر یا مساوی  $k$  برای  $k+1$  داده متمایز است. در این صورت،  $p(x)$  برابر است با ..... .

- (۱)  $x^k$  به ازای  $k \geq 5$
- (۲)  $x^k$  به ازای  $k \geq 4$
- (۳)  $x^k$  به ازای  $k \geq 2$
- (۴) یک چند جمله‌ای از درجه  $k$  به ازای  $k \geq 5$

-۸۸ - فرض کنید  $x_0, x_1, \dots, x_n$  نقاط متمایز و برای هر  $i \leq n$  قرار دهید:

$$\alpha_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j).$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{x_i^n}{\alpha_i}$$

برابر است با .....

n(۱)

دو (۲)

یک (۳)

$n!$  (۴)

مقدار

-۸۹ - تابع جدولی  $f$  در زیر داده شده است. درجه چند جمله‌ای درونیاب  $f$  کدام است؟

$x_i$	-1	0	1	2	-2
$f_i$	1	0	-1	4	-4

۳ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)

۴ (۴)

-۹۰ - چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی  $f$  در تعدادی نقطه برابر است با  $x + 2 - x^3$ . با افزودن کدام نقطه چند جمله‌ای درونیاب  $f$  تغییر نمی‌کند؟

(۲, ۲) (۱)

(-۲, -۵) (۲)

(-۳, -۲۲) (۳)

(۲, ۲۵) (۴)

-۹۱ فرض کنید  $(x)$  چند جمله‌ای درونیاب یک تابع جدولی در نقاط  $1, 0, -1$  باشد. مختصات نقطه  $(3, 6)$  را به آن بیافزایید. اگر  $(x)$  چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی جدید باشد، آنگاه مقدار  $|P_1(2) - P_1(3)|$  برابر است با

$$|1/5 - 0/25 P_1(3)| \quad (1)$$

$$|0/25 - 1/5 P_1(3)| \quad (2)$$

۳ صفر

$$|0/25 + 1/5 P_1(3)| \quad (f)$$

-۹۲ فرض کنید  $f(x) = x - \sin x$ . فرمول تکرار روش نیوتن برای تعیین تقریبی از ریشه معادله  $x = 0$  کدام است؟

$$x_{n+1} = \frac{x_n \cos x_n + \sin x_n}{\cos x_n - 1} \quad (1)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n (2 - \cos x_n) - \sin x_n}{1 - \cos x_n} \quad (2)$$

$$x_{n+1} = \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{1 - \cos x_n} \quad (3)$$

$$x_{n+1} = \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{\cos x_n - 1} \quad (f)$$

-۹۳ فرض کنید  $g$  روی  $I = [a, b]$  پیوسته است،  $g'(x) > 0$  و  $g''(x) < 0$ . برای برخی  $x \in I$ ،  $g(a)g(b) < 0$ . در این صورت  $g$  در  $I$

(۱) حداقل سه ریشه دارد.

(۲) دقیقاً یک ریشه دارد.

(۳) می‌تواند ریشه نداشته باشد.

(۴) می‌تواند یک یا بیشتر از یک ریشه داشته باشد.

-۹۴ قرار دهید  $O(h^k)$  خطا این تقریب باشد، که در آن  $f'_i \approx \frac{1}{h} \left( \Delta - \frac{\Delta^2}{2} \right) f_i$  و  $x_{i+1} - x_i = h$  . اگر  $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$  کدام است؟

۳ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)

۴ (۴)

-۹۵- محاسبه ریشه منفی معادله  $f(x) = x^7 - x - 2 = 0$  به وسیله تکرار نقطه ثابت  $x_{n+1} = -(x_n + 2)^{\frac{1}{7}}$  مدنظر است. این روش به ازای مقادیر  $x$  ..... است.

(۱) بزرگتر از  $\frac{7}{4}$  - به ریشه منفی همگرای مرتبه دوم

(۲) بزرگتر از  $\frac{7}{4}$  - به ریشه منفی همگرای خطی

(۳) بزرگتر از  $-3$  - به ریشه منفی همگرای خطی

(۴) بزرگتر از  $-3$  - به ریشه منفی همگرای مرتبه دوم

-۹۶- دنباله  $\{x_n\}$  که با رابطه بازگشتی  $x_{n+1} = \frac{x_n^7(x_n - 2)}{1 - 3x_n}$  و نقطه شروع  $x_0$  به دست می‌آید، با انتخاب  $x_0$  می‌تواند به صفر یا یک همگرا شود. مرتبه همگرایی این دنباله به صفر و یک به ترتیب برابر است با .....

(۱) ۲ و ۳

(۲) ۲ و ۲

(۳) ۱ و ۲

(۴) ۳ و ۳

-۹۷- تابع  $f(x) = (x - 1)^4$  را در نظر بگیرید و یک روش نیوتن اصلاح شده را برای پیدا کردن ریشه این تابع با شروع از نقطه  $x_0 = 0$  در نظر بگیرید:

$$x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

این روش با هر نقطه شروع اولیه، .....

(۱) همگرایی مجانبی از مرتبه ۲ دارد.

(۲) همگرایی مجانبی خطی دارد.

(۳) واگرا می‌شود.

(۴) به ازای  $k = 4$  دقیقاً در یک تکرار به جواب می‌رسد.

-۹۸ فرض کنید اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ ریشه‌های تابع پیوسته  $f(x)$  باشند که در بازه  $[1, 5]$  ریشه دیگری ندارد. فرض کنید ریشه‌ها با مقادیر ۲، ۳ و ۴ ساده (از مرتبه یک) است. اگر  $2 < b < 5$ ،  $1 < a < b$  و  $a + b = 6$  باشند، آنگاه روش دو بخشی در بازه  $[a, b]$  به همگراست.

- ۳ (۱)
- ۲ (۲)
- ۱ (۳)
- ۴ (۴)

-۹۹ روش II نقطه‌ای گاوس - لزاندر برای تخمین انتگرال به صورت زیر مدنظر است:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

که در آن،  $w_i$  ها و  $x_i$  ها به گونه‌ای تعیین می‌شوند تا فرمول‌های طرف راست برای چند جمله‌ای‌هایی از درجه کوچکتر یا مساوی  $n - 2$  دقیق باشد. در این صورت،  $w_i$  ها و  $x_i$  ها جواب دستگاه معادلات:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i^k = \frac{1 - (-1)^p}{q}, \quad k = 0, 1, \dots, r$$

هستند که در آن،

$$r = 2n \quad , \quad q = k \quad , \quad p = k + 1 \quad (1)$$

$$r = 2n \quad , \quad q = k + 1 \quad , \quad p = k \quad (2)$$

$$r = 2n - 1 \quad , \quad p = q = k + 1 \quad (3)$$

$$r = 2n + 1 \quad , \quad p = q = k \quad (4)$$

-۱۰۰ مقدار تخمینی  $y(0)$  از معادله دیفرانسیل  $y'(x) = f(x, y(x)) = x^r y(x)$ ،  $y(0) = 1$  با روش سری تیلر مرتبه ۳ (تا مشتقات سوم) به ازای  $h = 0.1$  کدام است؟

- ۱/۰۰۰۳ (۱)
- ۰/۰۰۰۹ (۲)
- ۰/۰۰۰۷ (۳)
- ۱/۰۰۳ (۴)

- ۱۰۱ - بعد فضای برداری  $\mathbb{R}^{\mathbb{C}^n} \times \mathbb{C}^n$  روی میدان  $\mathbb{R}$  چند است؟

- ۱۲ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۲۶ (۴)

- ۱۰۲ - فرض کنید  $P_n$  فضای برداری چند جمله‌ای‌ها از درجه حداقل  $n$  با ضرایب حقیقی باشد. همچنین فرض کنید  $d$  تبدیل خطی

از فضای  $P_n$  به  $P_n$  باشد که برای هر  $f \in P_n$ ،  $d(f) = f^{(k)}$  که در آن  $f^{(k)}$  مشتق  $k$  ام  $f$  است. پوچی  $d$  کدام است؟

- $k$  (۱)
- $k-1$  (۲)
- $n-k$  (۳)
- $n-k+1$  (۴)

- ۱۰۳ - فضای برداری  $V = \mathbb{C}^n$  روی  $\mathbb{R}$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $V$  پایه‌ای

برای  $V$  باشد. در این صورت ماتریس نمایش تبدیل خطی زیر تحت این پایه کدام است؟

$$T\begin{pmatrix} [a+bi] \\ [c+di] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a-bi \\ c-di \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

- ۱۰۴- اگر  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  با مقادیر ویژه متمایز  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  بوده و  $X_1$  و  $X_2$  بردارهای ویژه متناظر با  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  باشند و

آنگاه  $P^{-1}AP$  برابر است با:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- ۱۰۵- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  با درایه‌ها در یک میدان باشد. اگر  $A$  دارای وارون راست باشد آنگاه رتبه  $A$  برابر است با:

$$n \quad (2)$$

$$m+n \quad (4)$$

$$m \quad (1)$$

$$\max\{m, n\} \quad (3)$$

- ۱۰۶- فرض کنید  $V = M_n(\mathbb{R})$  فضای برداری تمام ماتریس‌های  $n \times n$  با درایه‌های حقیقی باشد.  $T: V \rightarrow V$  تبدیل خطی با

ضابطه  $T(A) = A^t$  است. اثر  $T$  (یعنی  $\text{tr}(T)$ ) کدام است؟

$$0 \quad (2)$$

$$n^n - n \quad (4)$$

$$n \quad (1)$$

$$n^n \quad (3)$$

- ۱۰۷- فرض کنید  $A$  ماتریسی با درایه‌های مختلط باشد و عدد طبیعی  $m > 1$  موجود باشد به طوری که  $A^m = I$ . در این صورت

کدام گزینه صحیح است؟

$$\det A = 1 \quad (1)$$

$A$  قطری شدنی است.

$$\text{tr}(A) = 0 \quad (2)$$

(3) تمامی مقادیر ویژه  $A$  برابر ۱ هستند.

- ۱۰۸- فرض کنید  $P_3$  فضای چند جمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی و از درجه حداکثر ۳ باشد. تبدیل خطی  $T: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3$  با

ضابطه  $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b+cd) + cx^2 + cx^3$  برابر است:

$$0 \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (3)$$

- ۱۰۹- فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی با درایه‌های حقیقی و با تعداد سطرهای مساوی‌اند. اگر  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$  نمایانگر رتبه ماتریس  $A$

$$\text{باشد آنگاه رتبه ماتریس } \begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} \text{ برابر است با:}$$

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \quad (۲)$$

$$2\text{rank}(A) + 5\text{rank}(B) \quad (۴)$$

$$\text{rank}(A)\text{rank}(B) \quad (۱)$$

$$|\text{rank}(A) - \text{rank}(B)| \quad (۳)$$

- ۱۱۰- فرض کنید  $V$  فضای برداری با بعد متناهی روی میدان  $\mathbb{R}$  است و  $S$  و  $T$  عملگرهای رتبه ۱ با هسته‌ها و تصاویر مساوی‌اند. در

این صورت کدام گزینه صحیح است؟

$$S = T \quad (۲)$$

$$ST = TS \quad (۴)$$

$$ST = -TS \quad (۱)$$

$$S^T = T^T \quad (۳)$$

- ۱۱۱- فرض کنید  $V$  فضای برداری ۴ بعدی با پایه  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  روی میدان دلخواه  $F$  است. اگر  $T$  تبدیل خطی روی  $V$

باشد به طوری که  $T(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$  برای  $1 \leq i \leq 3$  و همچنین  $T(\alpha_4) = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$ . چند جمله‌ای ویژه  $T$  کدام است؟

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \quad (۱)$$

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \quad (۲)$$

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \quad (۳)$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad (۴)$$

- ۱۱۲- فرض کنید دو بردار  $x$  و  $y$  پایه متعامد یکه برای فضای  $\mathbb{R}^2$  باشند و  $A = xy^t$ . در این صورت رتبه  $A$  و رتبه  $A^T$  به ترتیب

برابرند با:

$$1) \quad ۰ \text{ و } ۱$$

$$2) \quad ۱ \text{ و } ۰$$

$$3) \quad ۰ \text{ و } ۰$$

$$4) \quad ۱ \text{ و } ۱$$

- ۱۱۳- اگر  $\lambda$  مقدار ویژه‌ای از تبدیل خطی  $V \rightarrow V$  باشد آنگاه زیر فضای تولید شده توسط مجموعه بردارهای ویژه  $T$  که نظیر  $\lambda$  هستند را با  $W_\lambda$  نمایش می‌دهیم. تبدیل خطی  $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  با خواصی  $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد  $T$  صحیح است؟
- (۱) دو مقدار ویژه متمایز مانند  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  دارد به طوری که  $\dim W_{\lambda_1} = \dim W_{\lambda_2}$
  - (۲)  $T$  مقدار ویژه‌ای مانند  $\lambda$  دارد به طوری که  $\dim W_\lambda = 1$
  - (۳)  $T$  مقدار ویژه‌ای مانند  $\lambda$  دارد به طوری که  $\dim W_\lambda = 3$
  - (۴) مجموع مقادیر ویژه متمایز  $T$  برابر با یک است.

- ۱۱۴- فرض کنید چنانچه  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  مقدار ویژه‌های  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  باشند داریم:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -2 \quad (۱)$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1 \quad (۲)$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -5 \quad (۳)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \lambda_4 = -2 \quad (۴)$$

- ۱۱۵- فرض کنید  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تبدیل خطی است و به ازای هر زیرفضای یک بعدی  $W$  از  $\mathbb{R}^n$  داریم  $T(W) = W$ . اگر  $c_1, \dots, c_n$  مقادیر ویژه  $T$  باشند در این صورت داریم:
- (۱)  $c_1 = c_2 = \dots = c_n$
  - (۲)  $n = 1$
  - (۳)  $T$  قطری شدنی است ولی  $c_i$  ها ممکن است متمایز باشند.
  - (۴)  $T$  قطری شدنی نیست.

- ۱۱۶- فرض کنید  $V$  یک فضای برداری روی میدان  $F$  باشد در کدام یک از حالت‌های زیر تعداد زیرفضاهای  $V$  متناهی است؟
- (۱) مشخصه  $F$  صفر نباشد.
  - (۲)  $F$  میدان متناهی باشد.
  - (۳)  $\dim_F V$  متناهی باشد.
  - (۴) هر تابع خطی روی  $V$  مضری از همانی باشد.

- ۱۱۷- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $4 \times 4$  باشد که در معادله زیر صدق می‌کند.

$$24A^4 - 50A^3 + 25A^2 - 10A + I = 0$$

در این صورت داریم:

$$\det A = \frac{1}{24} \text{ و } \text{tr}A = -\frac{25}{12} \quad (1)$$

$$\det A = 24 \text{ و } \text{tr}A = 10 \quad (2)$$

$$\det A^{-1} = 24 \text{ و } \text{tr}A^{-1} = 10 \quad (3)$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{24} \text{ و } \text{tr}A^{-1} = -\frac{25}{12} \quad (4)$$

- ۱۱۸- تبدیل خطی  $T: P_2 \rightarrow P_2$  که در آن  $P_2$  فضای برداری چند جمله‌ای‌ها از درجه حداکثر ۲ است با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$T(p(t)) = (t-1)p'(t) + p(0)$$

که در آن  $p'$  مشتق  $p$  است. در این صورت چند جمله‌ای می‌نیمال  $T$  کدام است؟

$$(x^2 - 1)(x - 2) \quad (1)$$

$$(x - 1)(x - 2)^2 \quad (2)$$

$$(x - 1)(x - 2) \quad (3)$$

$$(x - 1)^2(x - 2) \quad (4)$$

- ۱۱۹- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$  در این صورت  $A^{1289} = A^{1285} + 5A^{1286}$  برابر است با:

$$6A^{1286} + 5A^{1285} \quad (1)$$

$$5A^{1286} + 6A^{1285} \quad (2)$$

$$2A^{1286} + 2A^{1285} \quad (3)$$

$$2A^{1286} + 3A^{1285} \quad (4)$$

- ۱۲۰- بزرگترین مجموعه مستقل خطی از ماتریس‌های  $4 \times 4$  که دو به دو با یکدیگر جابجا می‌شوند چند عضو دارد؟

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)