



209B

209

B

نام
نام خانوادگی
محل امضاء

عصر چهارشنبه
۹۰/۱۱/۲۶



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۱

مجموعه آمار - کد ۱۲۰۷

مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۶۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	علوم اقتصادی و اجتماعی	۲۰	۳۱	۵۰
۳	آمار کاربردی (روش‌های آماری - رگرسیون - نمونه‌گیری)	۴۵	۵۱	۹۵
۴	آمار نظری (احتمال و کاربرد آن - آمار ریاضی ۱ و ۲)	۴۵	۹۶	۱۴۰
۵	ریاضی (ریاضی عمومی - آنالیز ریاضی ۱)	۲۰	۱۴۱	۱۶۰

بهمن ماه سال ۱۳۹۰

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the correct choice on your answer sheet.

- 1- She emanated worldliness and the selfishness of one who is to everything but her own needs and caprices.
1) visible 2) compensatory 3) available 4) indifferent
- 2- Concrete blocks were piled high to the government center.
1) fortify 2) reveal 3) circulate 4) overlap
- 3- All sound has three: pitch, volume, and duration.
1) impacts 2) merits 3) properties 4) realms
- 4- One of Britain's most criminals has escaped from prison.
1) meritorious 2) notorious 3) indigenous 4) industrious
- 5- By the 1930s the wristwatch had almost completely the pocket watch.
1) devised 2) thwarted 3) supplanted 4) founded
- 6- She cared for her stepmother with unflinching throughout her long illness.
1) devotion 2) conformity 3) defect 4) prevalence
- 7- Ryan needed agreement to bring his proposal up for a vote.
1) contentious 2) adjacent 3) deliberate 4) unanimous
- 8- With so much water having its exterior, the engine was effectively ruined.
1) varnished 2) penetrated 3) inhabited 4) exceeded
- 9- Considering the of his injuries, he's lucky to be alive.
1) hurdle 2) divergence 3) extent 4) symptom
- 10- They intend to keep their force there in the region to compliance with the treaty.
1) verify 2) recollect 3) seize 4) conquer

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

The extensive fossil record of genera and species is testimony that dinosaurs were diverse animals, (11) lifestyles and adaptations. Their remains (12) in sedimentary rock layers (strata) dating to the Late Triassic Period (227 million to 206 million years ago). The abundance of their fossilized bones is substantive proof (13) dinosaurs were the dominant form of terrestrial animal life during the Mesozoic Era (248 million to 65 million years ago). It is likely that the known remains (14) a very small fraction (probably less than 0.0001 percent) of all the individual dinosaurs (15)

- 11- 1) and widely various 2) with widely varying
3) with wide varieties 4) and varying with wide
- 12- 1) found 2) that are found 3) are found 4) have found
- 13- 1) whether 2) if 3) when 4) that
- 14- 1) representing 2) representative of 3) a representation of 4) represent
- 15- 1) were living once 2) that once lived
3) that lived once 4) once that they lived

PART C: Reading Comprehension

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

Passage 1:

Correlations among variables are typically not free to vary between -1 and 1 , with bounds determined by the marginal distributions. Computing upper and lower limits of correlations given the marginal characteristics often raises theoretical and computational challenges. We propose a simple sorting technique that is predicated upon a little-known consequence of a well-established fact from statistical distribution theory to obtain approximate correlation bounds. This approach works regardless of the data type or distribution. We believe that it has practical value in appropriately specifying the correlation structure in simulation studies.

- 16- **What determines the bounds with which correlations vary is -----.**
 1) the marginals 2) the variances 3) the means 4) the distribution
- 17- **Computation of the bounds for correlations is -----.**
 1) easy 2) challenging 3) impossible 4) not useful
- 18- **Which approach works?**
 1) Sampling 2) Simulation 3) Regression method 4) An arranging method
- 19- **“To specify” (line 7) means -----.**
 1) To consider a special case 2) To say briefly
 3) To express carefully 4) To calculate the value
- 20- **Which one is correct?**
 1) Let us to compute 2) Let us computed
 3) Let us computing 4) Let us compute

Passage 2:

Measures of kurtosis, when applied to asymmetric distributions, are typically much affected by the asymmetry which muddies their already murky interpretation yet further. Certain kurtosis measures, however, when applied to certain wide families of skew-symmetric distributions display the attractive property of skewness-invariance. In this article, we concentrate mainly on quantile-based measures of kurtosis and their interaction with skewness-inducing transformations, identifying classes of transformations that leave kurtosis measures invariant. Further miscellaneous aspects of skewness-invariant kurtosis measures are briefly considered, these not being quantile-based and/or not involving transformations. While our treatment is as unified as we are able to make it, we do not claim anything like a complete characterization of skewness-invariant kurtosis measures but hope that our results will stimulate further research into the issue.

- 21- **Which measure is affected by asymmetry?**
 1) Kurtosis 2) Variance 3) Mean 4) Correlation
- 22- **What is the passage mainly concerned with?**
 1) Quantile 2) Median
 3) Measure of kurtosis 4) Invariance
- 23- **“To stimulate” (line 11) means -----.**
 1) to halt 2) to inform 3) to encourage 4) to duplicate

24- Is the treatment of the subject complete?

- 1) Yes 2) No 3) Perhaps 4) As far as possible

25- The result of this study -----.

- 1) is not useful 2) leads to further research
3) is hopeless 4) is wrong

Passage 3:

Rodgers and Nicewander (1988) presented thirteen different formulas for calculating the correlation coefficient. Each formula is intended to motivate an alternative computational and/or conceptual interpretation of this "universal" measure of association. This theme was continued by Rovine and Von Eye (1997), Falk and Well (1997), and Nelsen (1998). The purpose of this short note is to highlight a simple geometrical interpretation of the contributing terms in the summation in (3). The geometrical interpretation of the sample covariance presented here supplements these discussions of the correlation as the latter is a rescaled version of the former.

26- Who introduced different formulas for correlation?

- 1) Two students 2) Two writers 3) Two statisticians 4) Two merchants

27- "To motivate" (line 2) means -----.

- 1) to make eager 2) to make easy 3) to move 4) to complete

28- Correlation is a kind of a measure of -----.

- 1) variation 2) association 3) concentration 4) independence

29- What kind of interpretation is used in the passage?

- 1) Geometric 2) Arithmetic 3) Statistical 4) Philosophical

30- The subject was further studied -----.

- 1) after the year 2000 2) in Iran
3) for only one year 4) by several statisticians

علوم اقتصادی

۳۱- اگر با دو برابر شدن قیمت تخم مرغ، تقاضای آن $\frac{2}{3}$ قبل شود، ضریب کشش تقاضای تخم مرغ چه قدر است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$
(۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $+\frac{2}{3}$

۳۲- در ستون بهداشت و سلامتی روزنامه، این عنوان چاپ شده است: «مصرف کلم، ابتلا به سرطان روده را کاهش می دهد.» این

مسئله چه تغییری در منحنی تقاضای کلم در کوتاه مدت ایجاد می کند؟

- (۱) تغییر مکان منحنی به سمت چپ (۲) انتقال منحنی به سمت راست
(۳) تغییر منحنی به حالت موازی محور X ها (۴) صعودی شدن منحنی تقاضا

۳۳- چنانچه چند صفر از پول ملی حذف شود در آن صورت:

- (۱) تورم کاهش می یابد. (۲) میزان شمار پول ملی کاهش می یابد.
(۳) درآمد مردم و دولت کاهش می یابد. (۴) تقاضا برای کالاها و خدمات کاهش می یابد.

۳۴- کدام یک از سیاست های زیر تورم را تشدید می کند؟

- (۱) اعطای وام ازدواج (۲) انتشار اوراق مشارکت از سوی دولت
(۳) ترغیب مردم به خرج نکردن یارانه های واریزی به حساب هایشان (۴) واگذاری سهام شرکت های دولتی به مردم

۳۵- چنانچه با $\frac{2}{5}$ میلیارد واحد سرمایه‌گذاری جدید، $\frac{17}{5}$ میلیارد واحد به درآمد ملی اضافه شود، میل نهائی به مصرف جامعه چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$
 (۲) $\frac{2}{7}$
 (۳) $\frac{5}{7}$
 (۴) $\frac{6}{7}$

۳۶- اگر تابع هزینه کل شرکتی $TC = 1000 + 100Q - 10Q^2 + Q^3$ باشد، با تولید 50 واحد کالا، هزینه متوسط متغیرش چه قدر خواهد بود؟

- (۱) 2100
 (۲) 2350
 (۳) 3100
 (۴) 6400

۳۷- یکصد هزار تومان حال، پس از ۲ سال با نرخ سود بانکی 20% درصد (به روش بهره مرکب) چند هزار تومان خواهد شد؟

- (۱) 120
 (۲) 124
 (۳) 140
 (۴) 144

۳۸- اگر تابع تقاضا برای کالایی $P = 350 - 5Q$ باشد، به ازای چه مقدار تقاضا، درآمد نهایی 20 واحد می‌شود؟

- (۱) 33
 (۲) 35
 (۳) 65
 (۴) 70

۳۹- قیمت یک لیوان آب معدنی 2000 ریال است. شخصی سه لیوان از آن را می‌نوشد، لیوان اول معادل 1000 ریال، لیوان دوم 5000 ریال و لیوان سوم 2000 ریال رضامندی نصیب مصرف کننده می‌کند، اضافه رضامندی حاصله معادل چند ریال است؟

- (۱) 6000
 (۲) 11000
 (۳) 17000
 (۴) 23000

۴۰- در منحنی‌های هزینه بنگاه، کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

- (۱) AC و AVC موازی یکدیگرند.
 (۲) AC از نقطه حداقل MC عبور می‌کند.
 (۳) نقطه حداقل MC پایین‌تر از حداقل AVC و AC است.
 (۴) AVC از نقطه حداقل MC عبور می‌کند.

علوم اجتماعی

۴۱- عامل اصلی افزایش جمعیت کشور در دهه آتی کدام است؟

- (۱) بالا بودن نرخ باروری (۲) تأثیر ساختار سنی (۳) پایین بودن نرخ مرگ و میر (۴) سیاست‌های جمعیتی

۴۲- با توجه به نظریه «انتقال اپیدمیولوژیک» عمران کدام عبارت صحیح است؟

- (۱) در مدل شتابان، مهم‌ترین عوامل، فرایند نوسازی و انقلاب پزشکی بوده‌اند.
 (۲) در مدل کلاسیک، مهم‌ترین عوامل، مداخله دولت‌ها در امر بهداشت و فرایند نوسازی بوده‌اند.
 (۳) در مدل متأخر، مهم‌ترین عوامل، انقلاب پزشکی و فرایند نوسازی بوده‌اند.
 (۴) در مدل متأخر، مهم‌ترین عوامل، توسعه تکنولوژی پزشکی و دخالت دولت‌ها در امر بهداشت بوده‌اند.

۴۳- از رابطه r و NRR در جمعیت پایا (Stable) نتیجه می‌شود که در صورت ثبات r :

- (۱) NRR نیز ثابت خواهد ماند و این نتیجه به سطح مرگ و میر بستگی ندارد.
 (۲) NRR نیز ثابت خواهد ماند و این نتیجه متأثر از سطح مرگ و میر است.
 (۳) NRR الزاماً ثابت نخواهد ماند و متأثر از سطح باروری است.
 (۴) NRR الزاماً ثابت نخواهد ماند و به سطوح مرگ و میر و باروری بستگی دارد.

۴۴- نسبت بی سوادی در جمعیت ایران، با توجه به نتایج سرشماری ۱۳۸۵، حدود ۱۵ درصد بوده است. اگر ساختار سنی جمعیت ایران مشابه کشور سوئد بود:

- (۱) در محاسبه نسبت بی سوادی تغییری ایجاد نمی شد.
- (۲) نسبت بی سوادی کشور کاهش چشمگیری می یافت.
- (۳) نسبت بی سوادی کشور افزایش چشمگیری می یافت.
- (۴) برای تحلیل تغییرات احتمالی به داده های بیشتری نیاز می شد.

۴۵- بروز وضعیت مضیقۀ ازدواج (Marriage squeeze) برای زنان ایران عمدتاً به کدام دلیل بوده است؟

- (۱) تعداد بیشتر زنان نسبت به مردان
- (۲) پیامدهای جنگ تحمیلی و تلفات بیشتر مردان نسبت به زنان
- (۳) تعداد بیشتر دختران ازدواج نکرده نسبت به پسران ازدواج نکرده
- (۴) عدم تناسب تعداد ازدواج نکرده های دو جنس با احتساب تفاوت میانگین سن ازدواج آنها

۴۶- در یک جدول عمر داریم: $\begin{cases} l_{70} = 60000 \\ d_{70} = 3000 \\ l_{80} = 43000 \end{cases}$ ، میانۀ سن فوت در این جدول عمر برابر است با:

- (۱) ۷۲/۵ سال
- (۲) ۷۵ سال
- (۳) ۷۷/۵ سال
- (۴) ۸۲/۵ سال

۴۷- اگر داشته باشیم: $\begin{cases} l_{10} = 900 \\ l_{15} = 880 \\ l_{20} = 870 \end{cases}$ ، نسبت بازماندگی گروه سنی ۱۰ تا ۱۴ سال برابر است با:

- (۱) ۰/۹۸۸
- (۲) ۰/۹۸۳
- (۳) ۰/۹۷۷
- (۴) ۰/۹۶۶

۴۸- کدام عبارت صحیح است؟

- (۱) اکثریت قریب به اتفاق کشورهای در حال توسعه پس از جنگ دوم جهانی شروع به برگزاری سرشماری کردند.
- (۲) تا قبل از دهه ۱۹۶۰، خارج از اروپا و امریکای شمالی، به ندرت کشوری پیدا می شد که حتی یک سرشماری برگزار کرده باشد.
- (۳) هند جزو معدود کشورهای در حال توسعه ای است که از ۱۹۷۰ سرشماری جمعیت را آغاز کرد.
- (۴) قدمت سرشماری در جهان به آغاز قرن بیستم میلادی می رسد.

۴۹- چنانچه سهم گروه های سنی ۱۴ - سال و ۶۵ ساله و بیشتر در جمعیت به ترتیب برابر با ۳۸ و ۵ درصد باشد، میانگین سنی این جمعیت در مقایسه با میانۀ سنی آن چگونه است؟

- (۱) کمتر است.
- (۲) بیشتر است.
- (۳) تقریباً برابرند.
- (۴) برای مقایسه به داده های بیشتری نیاز است.

۵۰- اگر داشته باشیم:

سال تقویمی	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹
تعداد موالید زنده	۵۰۱۰۰	۵۰۰۰۰	۵۱۰۰۰
تعداد مرگ زیر ۱ سال	۱۳۸۰	۱۲۰۰	۱۱۵۰

و از تعداد مرگ زیر ۱ سال در سال‌های ۱۳۸۸ و ۱۳۸۹ به ترتیب ۴۰۰ و ۲۰۰ مرگ متعلق به موالید سال‌های ۱۳۸۷ و ۱۳۸۸ باشد، احتمال مرگ نوزادان سال ۱۳۸۸ برابر است با:

 $۰/۰۲۳۵$ (۴) $۰/۰۲۴$ (۳) $۰/۰۲۲$ (۲) $۰/۰۲۰$ (۱)

۵۱- فرض کنید طول عمر یکصد لامپ مقدار $\sum_{i=1}^{100} X_i = 500000$ به دست آمده است، اگر طول عمر لامپ‌ها دارای توزیع نمایی

با میانگین θ باشد، احتمال این که این نوع لامپ بیش از هزار ساعت عمر کند کدام است؟

(۱) e^{-3}

(۲) e^{-2}

(۳) e^{-1}

(۴) ۱

۵۲- اگر $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ دو برآوردگر مستقل ناریب با واریانس‌های به ترتیب σ^2 و $4\sigma^2$ برای θ باشند، کاراترین برآورد کننده برای θ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}[4\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2]$

(۲) $\frac{1}{5}[\hat{\theta}_1 + 4\hat{\theta}_2]$

(۳) $\frac{1}{2}[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2]$

(۴) $\frac{1}{5}[8\hat{\theta}_1 - 3\hat{\theta}_2]$

۵۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $\text{Beta}(\gamma, 1)$ باشد. همچنین فرض کنید $\delta(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i$

برآورد میانگین توزیع یعنی θ باشد. در این صورت میانگین توان دوم خطا (MSE)، $\delta(X)$ کدام است؟

(۱) $\frac{n+2}{3n^2}$

(۲) $\frac{n+2}{3(n-1)^2}$

(۳) $\frac{2(n+2)}{3n^2}$

(۴) $\frac{n+8}{18(n-1)^2}$

۵۴- از دو جامعه‌ی مستقل نرمال با واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 ، نمونه‌های تصادفی به حجم $n_1 = n_2 = 2$ انتخاب شده است اگر $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in (0.513, 1.170)$ ، $S_1^2 = S_2^2 = 2$ ، آنگاه دقت موردنظر برای برآورد تفاضل میانگین‌های دو جامعه با اطمینان ۹۵ درصد، کدام است؟

- (۱) ۷/۲
- (۲) ۸/۱
- (۳) ۸/۶
- (۴) ۹/۳

۵۵- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_{15} ، یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع نرمال با میانگین ۵ و $Y = \sum_{i=1}^{15} (X_i - 5)^2$ باشد.

اگر $(\frac{y}{29.141}, \frac{y}{4.660})$ یک فاصله‌ی اطمینان برای σ^2 باشد، ضریب اطمینان کدام است؟

- (۱) ۰/۸۹۰
- (۲) ۰/۹۵۰
- (۳) ۰/۹۷۵
- (۴) ۰/۹۹۰

۵۶- به منظور مقایسه نسبت دانشجویان موفق بومی و غیربومی از ۱۶۰ دانشجوی غیربومی تعداد ۳۰ نفر و از ۹۰ دانشجوی بومی ۲۰ نفر موفق ارزیابی شده‌اند. میزان دقت تفاضل نسبت‌های دانشجویان موفق بومی و غیربومی با اطمینان ۹۵ درصد کدام است؟ ($Z_{0.025} \approx 2$)

- (۱) $\frac{1}{9}\sqrt{10}$
- (۲) $\frac{1}{11}\sqrt{10}$
- (۳) $\frac{1}{21}\sqrt{10}$
- (۴) $\frac{1}{30}\sqrt{10}$

۵۷- فرض کنید برای برآورد نسبت در جامعه یک نمونه n_1 تایی به تصادف انتخاب شده است. اگر بخواهیم مقدار خطا به $\frac{1}{2}$ خطای برآورد قبلی کاهش یابد، باید به چه تعداد نمونه اضافه کنیم؟

- (۱) n_1
- (۲) $2n_1$
- (۳) $3n_1$
- (۴) $4n_1$

۵۸- سه جامعه نرمال با واریانس های مساوی از نظر میانگین مورد مقایسه قرار می گیرند. برای انجام آزمون خلاصه اطلاعات زیر حاصل شده است. مقدار میانگین مجموع مربعات خطا (MSE) کدام است؟

	I	II	III
اندازه نمونه	۲	۳	۴
میانگین نمونه	۴	۲	۱
واریانس نمونه	۲	۲	۱

- (۱) $\frac{3}{2}$
 (۲) $\frac{7}{3}$
 (۳) ۹
 (۴) ۳

۵۹- یک نوع قرص برای پایین آوردن فشار خون به ۵ نفر به طور تصادفی تجویز شده است. نتایج در جدول زیر ثبت شده اند. در سطح معنی داری ۰/۰۵ آزمون $H_0: \sigma^2 = 1$ در مقابل $H_1: \sigma^2 > 1$ را در نظر بگیرید. مقدار آماره ی آزمون و نتیجه ی آزمون کدام است؟

قبل از مصرف	۱۸۰	۱۵۱	۱۶۸	۱۷۱	۱۴۰
بعد از مصرف	۱۷۸	۱۵۲	۱۶۸	۱۷۰	۱۴۲

- (۱) ۱۰ و رد H_0
 (۲) ۱۰ و پذیرش H_0
 (۳) صفر و رد H_0
 (۴) ۱۸ و پذیرش H_0

۶۰- فرض کنید $X \sim N(\mu, 1)$ باشد. برای آزمون $H_0: \mu = 0$ در مقابل $H_1: \mu = 1$ ، اگر اندازه آزمون از ۰/۲۵ به ۰/۰۵ افزایش یابد، توان آزمون چه تغییری می کند؟

- (۱) به میزان ۰/۰۹۱ کاهش می یابد.
 (۲) به میزان ۰/۰۹۱ افزایش می یابد.
 (۳) به میزان ۰/۳۱۵ کاهش می یابد.
 (۴) به میزان ۰/۳۱۵ افزایش می یابد.

۶۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با توابع احتمال زیر باشد. برای آزمون $H_0: X \sim f_0$ در مقابل $H_1: X \sim f_1$ ، اگر ناحیه رد به صورت $C = \{x; x > 1\}$ تعریف شده باشد. توان آزمون کدام است؟

x	۱	۲	۳
f_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
f_1	$\frac{2-\theta}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\theta}{3}$

$0 < \theta < 1$

- (۱) $\frac{1-\theta}{3}$
- (۲) $\frac{2-\theta}{3}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{1+\theta}{3}$

۶۲- اگر در جدول توافقی تعداد سطرها از r به r_1 و تعداد ستون‌ها از c به c_1 کاهش یابد، درجه آزادی آماره آزمون فرض استقلال چقدر کاهش می‌یابد؟

- (۱) $r_1(c - c_1 - 1) + c_1(r - r_1)$
- (۲) $(r - r_1)(c - c_1)$
- (۳) $(r - 1)(c - c_1) + (r - r_1)(c_1 - 1)$
- (۴) $(r - r_1 - 1)(c - c_1 + 1)$

۶۳- فرض کنید $(x_1, y_1), \dots, (x_{19}, y_{19})$ یافته‌های یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال دو متغیره با ضریب همبستگی ρ باشد. اگر $\sum x_i y_i = 15$ ، $\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = 20$ و $\bar{x} = \bar{y} = 0$ باشد. برای آزمون فرض $H_0: \rho = \rho_0$ در مقابل $H_1: \rho > \rho_0$ ، فرض H_0 در سطح ۵ درصد رد می‌شود اگر و تنها اگر:

- (۱) $\left(\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\right) > \frac{1}{7} e^{0/411}$ باشد.
- (۲) $\left(\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\right) > \frac{2}{7} e^{0/49}$ باشد.
- (۳) $\left(\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\right) > \frac{1}{7} e^{1/96}$ باشد.
- (۴) $\left(\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\right) > \frac{1}{7} e^{6/28}$ باشد.

۶۴- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با میانگین θ باشد. برای آزمون $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta \neq 1$ مقدار p -مقدار (p-value) کدام است؟

$$(1) \quad 2(1 - e^{-x}) \quad x > 0$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}[2e^{-2x} - 1] \quad x > 0$$

$$(3) \quad \begin{cases} 2e^{-x} & x > \ln 2 \\ 2(1 - e^{-x}) & x < \ln 2 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 2(1 - e^{-x}) & x > \ln 2 \\ 2e^{-x} & x < \ln 2 \end{cases}$$

۶۵- از دو کلاس درس روش‌های آماری به طور مستقل، دو امتحان میان ترم به عمل آمده است. از این دو کلاس نمونه‌هایی به حجم به ترتیب ۳ و ۴ از دانشجویان انتخاب شده است و نمرات به شرح زیر می‌باشد. با فرض نرمال بودن نمرات دو کلاس و برابر بودن واریانس‌های نمرات دو کلاس، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵ درصدی برای واریانس مشترک دو کلاس، کدام است؟
 ۰ و ۲ و ۱ و ۴: نمره‌های کلاس ۲ : ۱ و ۳ و ۰: نمره‌های کلاس ۱

$$(1) \quad \left(\frac{155}{12 \times 12 / 832}, \frac{155}{12 \times 0 / 83} \right)$$

$$(2) \quad \left(\frac{131}{60 \times 11 / 143}, \frac{131}{60 \times 0 / 710} \right)$$

$$(3) \quad \left(\frac{31}{12 / 822}, \frac{31}{0 / 831} \right)$$

$$(4) \quad \left(\frac{5}{40 \times 0 / 50}, \frac{5}{7 / 377} \right)$$

۶۶- تغییر واحد اندازه‌گیری متغیر مستقل در کدام یک از موارد زیر منتج به تغییری نمی‌شود؟

(۱) برآورد عرض از مبدا

(۲) ضریب تعیین

(۳) برآورد ضریب زاویه

(۴) مجموع مربعات رگرسیونی

۶۷- در مدل رگرسیونی $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ اگر $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ و ε_i و $\hat{\beta}_1$ برآوردگر حداقل مربعات باشد. آنگاه:

$$(1) \quad P(\hat{\beta} > \beta) < \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad P(\hat{\beta} > \beta) = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad P(\hat{\beta} > \beta) > \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad P(\hat{\beta} > \beta) = 1$$

۶۸- دو متغیر تصادفی X و Y در رابطه $aX + bY = 1$ صدق می کنند ($a \neq 0, b \neq 0$) و ضریب همبستگی آنها برابر یک می باشد. میان a و b کدام رابطه برقرار است؟

(۱) $ab < 0$

(۲) $ab > 0$

(۳) $a + b = 1$

(۴) $a + b = -1$

۶۹- اگر در مدل رگرسیونی یک متغیر مستقل کیفی دارای ۵ رسته باشد، تعداد متغیرهای کمکی مورد نیاز برای نشان دادن این رسته ها کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۷۰- اگر در مدل رگرسیونی واریانس خطاها همگن نباشند، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) برآورد حداقل مربعات وزنی BLUE است.

(۲) برآورد حداقل مربعات معمولی اریب است.

(۳) برآورد حداقل مربعات معمولی ناریب اما خطی نیست.

(۴) برآورد حداقل مربعات معمولی BLUE است.

۷۱- مدل رگرسیونی $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ را به داده های زیر برازش داده ایم:

x	-1	-1	-1	0	0	0	0	+1	+1	+1
y	5	3	2	-3	-1	1	3	2	3	5

مقدار ضریب تعیین، R^2 ، کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $0/25$

(۳) $0/5$

(۴) یک

۷۲- مدل رگرسیون خطی ساده ای بر حسب X_1 به داده ها برازش داده مقدار آماره F در جدول تحلیل واریانس را با F_0 نمایش می دهند. حال اگر متغیر مستقل X_2 را وارد مدل کنند و آماره F را برای مدل با دو متغیر مستقل بدست آورند، کدام یک از گزینه ها صحیح تر است؟

(۱) $F > F_0$

(۲) $F < F_0$

(۳) $F = F_0$

(۴) $F \neq F_0$

۷۳- در مدل رگرسیون چند گانه $y = X\beta + \varepsilon$ که در آن ε دارای توزیع نرمال است کدام گزینه در مورد برآوردگر بردار β صحیح است؟

- (۱) برآوردگر کمترین مربعات ناریب و برآوردگر ماکسیمم درستنمایی ناریب است.
- (۲) برآوردگر کمترین مربعات ناریب و برآوردگر ماکسیمم درستنمایی ناریب است.
- (۳) برآوردگر کمترین مربعات و برآوردگر ماکسیمم درستنمایی با هم برابرند.
- (۴) واریانس مؤلفه های برآوردگر کمترین مربعات از واریانس مؤلفه های نظیر به نظیر برآوردگر ماکسیمم درستنمایی بزرگتر است.

۷۴- در مدل رگرسیونی $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ اگر $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ iid باشد. با فرض این که $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ برآوردگرهای حداقل مربعات باشند مقدار $\text{Var}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1)$ کدام است؟ $(S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2)$

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right) \quad (۱)$$

$$\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right) \quad (۲)$$

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}-1)^2}{S_{xx}} \right) \quad (۳)$$

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2 + 1}{S_{xx}} \right) \quad (۴)$$

۷۵- مدل رگرسیونی خطی ساده $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ با $E(\varepsilon_i) = 0$ ، $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 x_i^2$ برای $x_i \neq 0$ و

$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$ را در نظر بگیرید. اگر $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 1$ باشد آنگاه برآورد حداقل مربعات $\hat{\beta}_0$ کدام است؟

$$\frac{\sum (1-x_i) y_i}{\sum (1-x_i)^2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sum (x_i - 1) y_i / x_i}{\sum (1-x_i)^2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sum \left(\frac{1}{x_i} - 1 \right) y_i / x_i}{\sum \left(\frac{1}{x_i} - 1 \right)^2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{n} \left[\sum y_i / x_i - \hat{\beta}_1 \sum \frac{1}{x_i} \right] \quad (۴)$$

۷۶- در مدل رگرسیونی $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ با فرض $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ iid، اگر e_i باقیمانده i ام مدل باشد آنگاه $\sum_{i=1}^n \text{Var}(e_i)$ کدام است؟

(۱) $k\sigma^2$

(۲) $(n-k)\sigma^2$

(۳) $n\sigma^2$

(۴) $(n-k-1)\sigma^2$

۷۷- در مدل رگرسیون چند گانه $y = X\beta + \varepsilon$ ، ماتریس پر رتبه ستونی $X_{n \times p}$ را به صورت $X = (I_n \ X_1)$ افراز می کنند.

اگر x_{ij} عنصر (i,j) ام ماتریس X_1 باشد به طوری که برای $j = 1, 2, \dots, p-1$ ، $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 0$ ، آنگاه مجموع مربعات

رگرسیون (SS_{Reg}) ، کدام است؟

(۱) $\hat{\beta}'_1 X' X \hat{\beta}_1$

(۲) $\hat{\beta}'_1 X'_1 X_1 \hat{\beta}_1$

(۳) $\hat{\beta}'_1 (X'_1 X_1)^{-1} \hat{\beta}_1$

(۴) $\hat{\beta}'_1 (X' X)^{-1} \hat{\beta}_1$

۷۸- خط $\hat{y}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i1}$ رگرسیون y روی x_1 است. باقیمانده i -ام این مدل را با $e_i = y_i - \hat{y}_i(x_1)$ نمایش می دهیم.

حال اگر باقیمانده ها را روی متغیر x_2 به ازای مقادیر $(1, -2, 1, 1, -2, 1, 1, -2, 1)$ رگرسیون کرده مدل رگرسیونی

برازش شده y بر حسب x_1 و x_2 را به صورت $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ بنویسیم، ضرایب b_0 و b_1 کدامند؟

(۱) $b_0 = \hat{\alpha}_0$ ، $b_1 = \hat{\alpha}_1$

(۲) $b_0 \neq \hat{\alpha}_0$ ، $b_1 = \hat{\alpha}_1$

(۳) $b_0 = \hat{\alpha}_0$ ، $b_1 \neq \hat{\alpha}_1$

(۴) $b_0 \neq \hat{\alpha}_0$ ، $b_1 \neq \hat{\alpha}_1$

۷۹- متغیر y را بر حسب x با مدل $y = \beta_0 e^{-\beta_1 x} + \varepsilon$ نمایش داده اند. بر آورد کمترین مربعات معمولی پارامتر β_1 کدام است؟

(۱) $b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

(۲) $b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \frac{1}{y_i}}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

(۳) $b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \ln y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

(۴) $b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \ln \frac{1}{y_i}}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

۸۰- در یک مدل رگرسیون چند گانه اگر آماره F معنی‌دار باشد اما هیچ یک از آماره‌های t معنی‌دار نباشند، آنگاه:

- (۱) ممکن است خود همبستگی بین مشاهدات وجود داشته باشد.
- (۲) ممکن است بین متغیرهای مستقل هم خطی وجود داشته باشد.
- (۳) مدل رگرسیون برازش شده مشکلی ندارد.
- (۴) برازش یک مدل غیرخطی مناسب‌تر می‌باشد.

۸۱- همه‌ی موارد زیر برای نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای صحیح‌اند بجز:

- (۱) افزایش حجم خوشه معمولاً باعث افزایش اساسی در واریانس برآورد میانگین جامعه می‌شود.
- (۲) افزایش حجم خوشه باعث کاهش ضریب همبستگی خوشه‌ای می‌شود به قسمی که نرخ کاهش ضریب همبستگی نسبت به نرخ افزایش حجم خوشه کند است.
- (۳) برای کارا تر کردن نمونه‌گیری خوشه‌ای باید خوشه‌ها را به صورتی تشکیل داد که پراکندگی درون خوشه‌ها هر چه ممکن، بزرگتر باشد.

(۴) چنانچه ضریب همبستگی خوشه‌ای صفر باشد نمونه‌گیری خوشه‌ای به نمونه‌گیری تصادفی ساده تبدیل می‌شود.

۸۲- در چه صورت به جای نمونه‌گیری طبقه‌ای از نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای یا دو مرحله‌ای استفاده می‌شود؟

- (۱) وقتی چارچوب کلی جامعه در دسترس باشد.
- (۲) وقتی داخل طبقات واریانس کم باشد.
- (۳) وقتی داخل طبقات واریانس زیاد باشد.
- (۴) وقتی چارچوب کلی جامعه در دسترس نباشد.

۸۳- اگر $S_{wr} = (u_1, \dots, u_n)$ یک نمونه تصادفی ساده با جایگذاری از جامعه U_1, \dots, U_N باشد، به ازای هر

$m = 1, \dots, N$ مقدار $P(U_m \in S_{wr})$ کدام است؟

$$(1) \frac{n}{N}$$

$$(2) 1 - \frac{n}{N}$$

$$(3) 1 - (1 - \frac{1}{N})^n$$

$$(4) (1 - \frac{1}{N})^n$$

۸۴- اگر $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ یک نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری از جامعه متناهی $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$

باشد، ضریب همبستگی \bar{x} و \bar{y} (میانگین نمونه x_i ها و میانگین نمونه y_i ها) کدام است؟

(۱) همان ضریب همبستگی جامعه

(۲) $\frac{1}{n}$ ضریب همبستگی جامعه

(۳) n برابر ضریب همبستگی جامعه

(۴) $\frac{1}{n} (1 - \frac{n}{N})$ برابر ضریب همبستگی جامعه

۸۵- در نمونه گیری از یک جامعه ی نسبتاً بزرگ که بتوان از کسر نمونه گیری صرف نظر نمود اگر واریانس برآوردکننده تفاضلی برابر

$1/5$ ، حجم نمونه برابر 10 و تغییرات صفت اصلی S^2 برابر 16 باشد در این صورت ضریب همبستگی بین صفت اصلی y و

کمکی x چقدر است؟

(۱) 0

(۲) $\frac{1}{16}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{2}$

۸۶- از جامعه ی به حجم N نمونه ای تصادفی به روش با جایگذاری به حجم n انتخاب می کنیم. اگر U_i تعداد دفعات ظاهر شدن

واحد i ام جامعه در نمونه باشد. ضریب تغییرات U_i کدام است؟

(۱) $\sqrt{\frac{N-1}{n}}$

(۲) $\sqrt{1-\frac{n}{N}}$

(۳) $1-\frac{n}{N}$

(۴) $\frac{N-1}{n}$

۸۷- فرض کنید در جمعیتی با ۳ طبقه، وزن طبقات با هم برابر بوده $(W_1 = W_2 = W_3)$ و در انتساب نیمین حجم نمونه در طبقه

اول بیشتر از حجم طبقه اول جامعه باشد $(n_1 > N_1)$ در صورتی که $S_1 = 12$ و $S_2 = S_3 = 4$ باشد، پس از اصلاح

انتساب نمونه گیری انجام شده، با چشم پوشی از کسر نمونه گیری واریانس برآوردگر میانگین جامعه (\hat{y}_{st}) کدام است؟ (n)

حجم نمونه کل است.

(۱) $\frac{64}{9n}$

(۲) $\frac{64}{9(n-N_1)}$

(۳) $\frac{400}{9n}$

(۴) $\frac{1}{9} \left(\frac{144}{N_1} + \frac{64}{n-N_1} \right)$

۸۸- برای برآورد \bar{Y} (میانگین جامعه متناهی با حجم N) با استفاده از \bar{y} (میانگین نمونه n تایی بدون جایگذاری) اگر بخواهیم مجموع تابع هزینه $c(n) = a.n$ و میانگین مربع خطای برآوردگر می نیمم گردد حجم نمونه را باید چقدر در نظر بگیریم؟

$$(S^2 = N\sigma^2/N-1, \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum (Y_i - \bar{Y})^2)$$

$$\frac{\sigma^2}{a} \quad (1)$$

$$\frac{s^2}{a} \quad (2)$$

$$\frac{s}{\sqrt{a}} \quad (3)$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{a}} \quad (4)$$

۸۹- می خواهیم نسبت اجاره نشین خانوارهای یک شهر خیلی بزرگ را در سال جاری با اطمینان ۹۵٪ برآورد کنیم به طوری که حداکثر خطای برآورد 0.02 باشد. با یک کارشناس املاک مشورت کرده ایم وی اظهار داشته که نسبت اجاره نشین از 0.2 بیشتر نیست بر اساس این اظهار نظر حجم نمونه جهت برآورد این نسبت کدام است؟ ($Z_{0.975} \approx 2$ و کسر نمونه گیری قابل اغماض است.)

$$n \geq 1600 \quad (1)$$

$$n \leq 1600 \quad (2)$$

$$n \leq 2500 \quad (3)$$

$$n \geq 2500 \quad (4)$$

۹۰- از جامعه ای با حجم 100 و واریانس $S^2 = 40$ نمونه ای تصادفی بدون جایگذاری به حجم $n_1 = 20$ انتخاب کرده و میانگین این نمونه را با \bar{y}_1 نشان می دهیم سپس از این نمونه یک زیر نمونه ساده بدون جایگذاری $n_2 = 5$ تایی انتخاب می کنیم و میانگین آن را با \bar{y}_2 نمایش می دهیم. واریانس $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ چقدر است؟

$$2 \quad (1)$$

$$6 \quad (2)$$

$$8 \quad (3)$$

$$9/2 \quad (4)$$

۹۱- برای تعیین برآوردی از میانگین مشخصه y در یک جامعه بزرگ از مشخصه کمکی x استفاده شده است. به تجربه می دانیم که ضریب همبستگی بین این دو مشخصه 0.8 است. یک نمونه مقدماتی به حجم 100 به روش تصادفی ساده بدون جای گذاری از جامعه مورد نظر می گیریم و درمی یابیم که برآوردکننده ناریب واریانس برآورد میانگین مشخصه y برابر 36 است. اگر بخواهیم با روش رگرسیونی میانگین مشخصه y را برآورد کنیم به گونه ای که برآورد واریانس برآوردکننده کمتر از 36 باشد، حجم نمونه حداقل کدام است؟ (از کسر نمونه گیری صرف نظر کنید.)

$$36 \quad (1)$$

$$45 \quad (2)$$

$$64 \quad (3)$$

$$80 \quad (4)$$

۹۲- در جمعیت فرضی زیر واریانس برآوردگر نسبت A در نمونه سیستماتیک یک در چهار (چهار در میان) کدام است؟

AAAABBBAABBBBB AAAABB

- (۱) ۰/۷۵
(۲) ۰/۰۷۵
(۳) ۰/۰۲
(۴) ۰/۰۱

۹۳- اگر x_i و y_i به ترتیب تعداد افراد و مخارج ماهانه خانوار i ام نمونه باشد، در یک نمونه ۵ تایی از بین ۱۰۰ خانوار ساکن در یک مجتمع مسکونی نتایج زیر حاصل شده است. اگر بدانیم میانگین واقعی جمعیت در این مجتمع ۳/۲ نفر است، برآورد رگرسیونی میانگین مخارج ماهانه خانوارهای ساکن در این مجتمع کدام است؟

x_i	۲	۳	۴	۲	۴
y_i	۸	۱۵	۱۸	۱۰	۱۹

- (۱) ۱۴/۹۰
(۲) ۱۴/۹۳
(۳) ۱۴/۹۵
(۴) ۱۴/۹۸

۹۴- برای برآورد نسبت دانش‌آموزان بی‌سرپرست در شهری که دارای ۵۰۰ مدرسه شامل ۲۵۰۰۰ دانش‌آموز است، ۴ مدرسه را به تصادف و به روش با جایگذاری ولی با احتمال متناسب با تعداد دانش‌آموزان آنها انتخاب نموده‌ایم. نتایج زیر حاصل شده است. نسبت فوق را چقدر برآورد می‌کنید؟

تعداد کل دانش‌آموزان مدرسه	۸۰۰	۴۰۰	۳۰۰	۵۰۰
تعداد دانش‌آموزان بی‌سرپرست مدرسه	۱۶	۲۰	۶	۱۵

- (۱) ۰/۰۲۵
(۲) ۰/۰۲۸۵
(۳) ۰/۰۳۲۵
(۴) ۰/۳

۹۵- از جامعه‌ای با ۵ خوشه و با حجم خوشه‌های همسان ۵ ($M = 5$) یک نمونه ۳ خوشه‌ای با اطلاعات زیر گرفته شده است:

شماره خوشه نمونه	میانگین خوشه (\bar{y}_i)	تغییرات خوشه (S_i^2)
۱	۱	۲
۲	۴	۶
۳	۱	۱

اگر از این جامعه نمونه‌ای به حجم ۱۵ به روش تصادفی ساده بدون جایگذاری استخراج شود در مورد دقت دو روش برآورد میانگین جامعه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) دقت هر دو روش نمونه‌گیری یکسان است.
(۲) با اطلاعات فوق نمی‌توان قضاوت کرد.
(۳) دقت نمونه‌گیری تصادفی ساده از نمونه‌گیری خوشه‌ای بیشتر است.
(۴) دقت نمونه‌گیری خوشه‌ای از نمونه‌گیری تصادفی ساده بیشتر است.

۹۶- تاس سالمی را مرتباً پرتاب می‌کنیم تا خال ۶ ظاهر شود. در صورت مشاهده خال $K (K = 1, \dots, 5)$ ، K دقیقه صبر می‌کنیم

و سپس تاس را دوباره پرتاب می‌کنیم. هرگاه T برابر زمان انتظار تا مشاهده خال ۶ باشد. مقدار امید ریاضی T کدام است؟

(۱) ۱۳

(۲) ۱۴

(۳) ۱۵

(۴) ۱۷

۹۷- n جعبه داریم که هر یک دارای ۳ مهره A ، B و C هستند. یک مهره به تصادف از هر جعبه خارج می‌کنیم، احتمال این که

A ، B و C متعلق به این مجموعه انتخاب شده باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{2^n}{3^{n-1}}$

(۲) $\frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$

(۳) $1 - \frac{2^n}{3^{n-1}}$

(۴) $1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$

۹۸- شش فنجان و نعلبکی را در نظر بگیرید که دو جفت از آنها قرمز، دو جفت سفید و دو جفت آبی است. اگر فنجان‌ها را به

تصادف روی نعلبکی‌ها بگذاریم (هر فنجان روی یک نعلبکی) احتمال اینکه هیچ فنجانی روی نعلبکی هم رنگ خود قرار نگیرد

کدام است؟

(۱) $\frac{8}{90}$

(۲) $\frac{10}{90}$

(۳) $\frac{8}{720}$

(۴) $\frac{10}{720}$

۹۹- فرض کنید X_1 دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ و X_2, \dots, X_n دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{2}{\theta}$ باشند. همچنین فرض

کنید X_1, \dots, X_n مستقل از هم هستند. چقدر احتمال دارد X_1 کوچکترین آماره مرتب در نمونه X_1, \dots, X_n باشد؟

(۱) $\frac{\theta}{n+1}$

(۲) $\frac{2\theta}{n+1}$

(۳) $\frac{2}{n+1}$

(۴) $\frac{2}{n+\theta}$

۱۰۰- ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه در کیسه‌ای داریم. ۳ مهره را یکی یکی و با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. اگر X نمایانگر تعداد

مهره‌های سفید در این نمونه باشد، محتمل‌ترین مقدار X کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۱۰۱- فرض کنید $N(t)$ یک فرآیند پواسن با نرخ λ باشد. اگر $N(a, b) = N(b) - N(a)$ ، مقدار

$P(N(2,3) = 6 | N(0,4) = 10)$ کدام است؟

- (۱) $\binom{10}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^4$
- (۲) $\binom{10}{6} \left(\frac{6}{10}\right)^6 \left(\frac{4}{10}\right)^4$
- (۳) $\binom{10}{6} \left(\frac{4}{10}\right)^6 \left(\frac{6}{10}\right)^4$
- (۴) $\binom{10}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^6 \left(\frac{1}{4}\right)^4$

۱۰۲- ده عدد میله به تصادف از تولید انبوه یک کارخانه انتخاب کرده‌ایم. اگر طول واقعی میله‌ها X (سانتی‌متر) یک متغیر تصادفی

باتابع چگالی احتمال $10 \leq x \leq 12$ ، $f(x) = \frac{1}{2}$ باشد، احتمال اینکه در میان ده میله انتخابی، ۵ میله دارای طولی کمتر از

10.5 سانتی‌متر و ۲ میله دارای طولی بیش از 11.5 سانتی‌متر باشند کدام است؟

- (۱) $\frac{315}{4^7}$
- (۲) $\frac{63}{4^7}$
- (۳) $\frac{315}{4^8}$
- (۴) $\frac{63}{4^8}$

۱۰۳- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $1 < x < 3$ ، $f(x) = \frac{x-1}{2}$ باشد. تابع $u(x)$ کدام گزینه باشد

تا $Y = U(X)$ دارای توزیع یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ باشد؟

- (۱) $u(x) = \frac{1}{4}(x-1)$
- (۲) $u(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2$
- (۳) $u(x) = \frac{1}{3}(x-1)$
- (۴) $u(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2$

۱۰۴- اگر $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ و $X_i = \beta X_{i-1}$ ($i = 2, \dots, n$)، مقدار $\text{Cov}(X_1, \sum_{i=1}^n X_i)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} \right)$

(۲) $\frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{1-\beta^n}{1-\beta} \right)$

(۳) $\sigma^2 \left(\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} \right)$

(۴) $\sigma^2 \frac{1-\beta^n}{1-\beta}$

۱۰۵- یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را $m+n$ بار مستقلاً تکرار می‌کنیم. اگر بدانیم تعداد کل موفقیت‌ها k است آنگاه امید ریاضی تعداد موفقیت‌ها در اولین m آزمایش (m تکرار اول) کدام است؟

(۱) $\frac{m}{m+n}$

(۲) $\frac{k}{m+n}$

(۳) $\frac{nk}{m+n}$

(۴) $\frac{mk}{m+n}$

۱۰۶- فرض کنید X_1, X_2, \dots یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان برنولی با پارامتر p باشد. اگر $S_n = X_1 + \dots + X_n$ و $N_k = \min\{n \geq 1, S_n = k\}$ ، توزیع متغیر تصادفی N_k کدام است؟

(۱) $B(n, p)$

(۲) $B(k, p)$

(۳) $NB(k, p)$

(۴) $NB(n, p)$

۱۰۷- اگر $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ، مقدار $E\left(\frac{X!}{(X-3)!}\right)$ کدام است؟

(۱) $\frac{n!}{(n-3)!} p^3$

(۲) $\frac{n!}{(n-3)!} q^3$

(۳) $\frac{n!}{(n-3)!} p^2 q$

(۴) $\frac{n!}{(n-3)!} pq^2$

۱۰۸- نقطه (X, Y) را به تصادف از ناحیه $R = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ انتخاب می‌کنیم. مقدار $E(X | Y = y)$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $y+1$
- (۳) ۰
- (۴) y

۱۰۹- فرض کنید $(X_1, X_2) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$. توزیع $Y = X_1^2 - 2\rho X_1 X_2 + X_2^2$ کدام است؟

- (۱) $\text{Exp}\left(\frac{1}{1-\rho^2}\right)$
- (۲) $\text{Exp}\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right)$
- (۳) $\text{Exp}(1-\rho^2)$
- (۴) $\text{Exp}(2(1-\rho^2))$

۱۱۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل هندسی با تابع احتمال زیر باشند.

$$P[X_i = k] = p_i q_i^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad p_i + q_i = 1$$

اگر $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ، $q = \prod_{i=1}^n q_i$ و $p = 1 - q$ ، مقدار $E[q^{X_{(1)}}]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{p}{1+p}$
- (۲) $\frac{q}{1+q}$
- (۳) $\frac{p}{1+q}$
- (۴) $\frac{q}{1+p}$

۱۱۱- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_N دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ و N یک متغیر تصادفی هندسی با تابع احتمال $P(N=n) = pq^{n-1}$, $n=1, 2, \dots$ و مستقل از X_j ها باشد. اگر $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_N)$ مقدار $P(X_{(1)} \leq x)$ کدام است؟

$$\frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - qe^{-\lambda x}} \quad (1)$$

$$\frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - pe^{-\lambda x}} \quad (2)$$

$$\frac{1 - qe^{-\lambda x}}{1 - pe^{-\lambda x}} \quad (3)$$

$$\frac{1 - pe^{-\lambda x}}{1 - qe^{-\lambda x}} \quad (4)$$

۱۱۲- فرض کنید متغیر تصادفی X با تابع توزیع F_X و تابع چگالی f_X و متغیر تصادفی Y با تابع توزیع F_Y و تابع چگالی f_Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر برای هر $z \in \mathbb{R}$ ، $F_X(z) \geq F_Y(z)$ و نامساوی برای حداقل یک z اکید باشد، در مورد $P(X < Y)$ چه می‌توان گفت؟

$$(1) \text{ حداقل } \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ حداکثر } \frac{1}{2}$$

$$(3) \text{ دقیقاً } \frac{1}{2}$$

$$(4) \text{ دقیقاً صفر}$$

۱۱۳- فرض کنید X و $Y = (Y_1, Y_2)$ دو متغیر تصادفی با چگالی احتمال توأم زیر باشند،

$$f(x, y_1, y_2) = x^2(1-x)^{y_1+y_2}, \quad 0 < x < 1, \quad y_1, y_2 = 0, 1, 2, \dots$$

توزیع X کدام است؟

$$(1) U(0, 1)$$

$$(2) \text{Beta}(1, 2)$$

$$(3) \text{Beta}(2, 1)$$

$$(4) \text{Beta}(2, 2)$$

۱۱۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n دارای تابع احتمال توام زیر باشند.

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{S_n!(n - S_n)!}{(n+1)!}, \quad x_i = 0, 1, \quad i = 1, \dots, n$$

که در آن $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$. تابع احتمال توام X_1, \dots, X_{n-1} کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2} \frac{S_{n-1}!(n - S_{n-1})!}{n!}$

(۲) $\frac{1}{2} \frac{S_{n-1}!(n - 1 - S_{n-1})!}{n!}$

(۳) $\frac{S_{n-1}!(n - 1 - S_{n-1})!}{n!}$

(۴) $\frac{S_{n-1}!(n - S_{n-1})!}{n!}$

۱۱۵- نقطه‌ای را به تصادف در داخل دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز $(0, 0)$ انتخاب می‌کنیم. فاصله این نقطه از مبدأ را X می‌نامیم. اگر $X = x$ باشد، آنگاه نقطه دیگری را در داخل دایره‌ای به شعاع x و به مرکز $(0, 0)$ انتخاب می‌کنیم. فاصله این نقطه تا مبدأ را Y می‌نامیم. $E(Y)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\pi}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{4}{3}$

۱۱۶- اگر متغیر تصادفی X مقادیر صحیح مثبت را اختیار کند و $K = 0, 1, 2, \dots$ و $P(X > K + 1 | X > K) = \left(\frac{K+1}{K+2}\right)^2$.

مقدار $E(X)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{6}$

(۳) $\frac{\pi^2}{3}$

(۴) $\frac{\pi^2}{6}$

۱۱۷- متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور $M_X(t) = \frac{1}{4}(1 + e^{-t})^2$ است، مقدار $P(X^2 + 3X + 2 = 0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
- (۲) $\frac{3}{8}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{3}{4}$

۱۱۸- متغیر تصادفی X_n دارای توزیع یکنواخت بر بازه $(-n, n)$ است. درباره توزیع حدی X_n کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $X_n \xrightarrow{D} 0$
- (۲) X_n دارای توزیع حدی نیست.
- (۳) $X_n \xrightarrow{D} \frac{1}{2}$
- (۴) $X_n \xrightarrow{D} 1$

۱۱۹- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مثبت مستقل و هم توزیع هستند. امید ریاضی کسر $\frac{2X+3Y}{X+Y}$ کدام است؟

- (۱) $1/5$
- (۲) $2/5$
- (۳) $3/5$
- (۴) $4/5$

۱۲۰- متغیرهای X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام $x, y > 0$ $f(x, y) = 2e^{-x-2y}$ می باشند. مقدار $E[\max(X, Y)]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{5}{9}$
- (۳) $\frac{17}{18}$
- (۴) $\frac{25}{18}$

۱۲۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت در فاصله $(0, \theta)$ باشد. اگر قرار دهیم

$$T(X) = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

آنگاه $T(X)$ یک برآوردگر سازگار برای کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{1}{\theta}$
- (۲) $\frac{e}{\theta}$
- (۳) $\frac{\theta}{e}$
- (۴) θ

۱۲۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی ناتباهیده با واریانس متناهی σ^2 باشد. اگر قرار دهیم

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{و} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

که در آن S^2 آنگاه در مورد S به عنوان برآوردگری برای σ گزینه صحیح

کدام است؟

- (۱) اریب است با اریبی منفی
- (۲) اریب است با اریبی مثبت
- (۳) ناریب است.
- (۴) در مورد اریبی آن نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۱۲۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی $E(\mu, \sigma)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد،

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{\sigma}(x-\mu)}, \quad x > \mu, \quad \sigma > 0$$

با فرض آنکه $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ و $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ برآوردگر گشتاوری (μ, σ) کدام است؟

- (۱) (\bar{X}, S)
- (۲) $(\bar{X} - S, S)$
- (۳) $(\bar{X} + S, S^2)$
- (۴) $(\bar{X} - S^2, S^2)$

۱۲۴- فرض کنید ۲، ۱، ۶، ۱، ۵، ۳ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع هندسی با تابع احتمال $x = 1, 2, \dots$ و $f(x) = p(1-p)^{x-1}$ است. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر $p \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{4}{9}$

۱۲۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n دارای توزیع توأم باشند. اگر $X_1 \sim N(0, 1)$ و برای $j = 1, \dots, n-1$ ، توزیع شرطی X_{j+1} به شرط $X_1 = x_1, \dots, X_j = x_j$ ، $N(\rho x_j, 1)$ باشد. MLE پارامتر ρ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2}$
- (۲) $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$
- (۳) $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$
- (۴) $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X})(X_{i+1} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

۱۲۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $U(\theta^2, \theta)$ باشد اگر $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ و $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{X_{(1)}}$
- (۲) $X_{(n)}$
- (۳) $\max(\sqrt{X_{(1)}}, X_{(n)})$
- (۴) $\frac{\sqrt{X_{(1)}} + X_{(n)}}{2}$

۱۲۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, \theta)$ باشد (θ واریانس توزیع است).

فرض کنید $U = \frac{\bar{X}^2}{X^2}$ ، کدام گزاره درست است؟ $(\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2)$

(۱) توزیع U به θ بستگی دارد.

(۲) واریانس U به θ بستگی دارد.

$$E(U) = \frac{1}{n^2} \quad (۳)$$

$$E(U) = \frac{1}{n} \quad (۴)$$

۱۲۸- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. اگر $T(X_1, X_2) = (X_1, 2X_2)$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) آماره T بسنده نیست اما کامل است.

(۲) آماره T بسنده و کامل است.

(۳) آماره T بسنده است اما کامل نیست.

(۴) آماره T نه بسنده است و نه کامل است.

۱۲۹- اگر X_1, \dots, X_5 یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ باشد. کدام آماره برای θ بسنده است؟

$$\sum_{i=1}^5 i X_i \quad (۱)$$

$$\sum_{i=1}^5 \frac{X_i}{i} \quad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^5 (2i-1) X_i \quad (۳)$$

$$\sum_{i=1}^5 (2i+1) X_i \quad (۴)$$

۱۳۰- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ ($0 < \theta < 1$) و $T = X_1 + X_2 + X_3$ باشد.

آماره $U = (X_1 + X_2, X_1 + X_3)$ برای θ بسنده نیست، زیرا:

(۱) U تابع T است.

(۲) T و U مستقل اند.

(۳) T و U هم توزیع هستند.

(۴) T تابع U نیست.

۱۳۱- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_m و Y_1, Y_2, \dots, Y_n نمونه‌های تصادفی مستقل با توزیع‌های نمایی با میانگین‌های به ترتیب $\frac{1}{\lambda}$ و $\frac{1}{\lambda\theta}$ باشند. برآوردگر ناریب با کمترین واریانس یکنواخت (UMVUE) پارامتر θ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m} \cdot \frac{n-1}{n}$
- (۲) $\frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{n-1} \cdot \frac{m}{n}$
- (۳) $\frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{n} \cdot \frac{m}{m}$
- (۴) $\frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m} \cdot \frac{n}{n}$

۱۳۲- فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی هم توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند. اگر برآوردگر $T = aX_1 + bX_2$ (UMVUE) پارامتر μ باشد، مقدار $\text{Cov}(X_1, X_2)$ کدام است؟

- (۱) 0
- (۲) σ^2
- (۳) $(b-a)\sigma^2$
- (۴) $a\sigma^2 + b$

۱۳۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. که در آن μ و σ^2 هر دو نامعلوم
 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ و $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ باشند، برآوردگر ناریب با کمترین واریانس (UMVUE) پارامتر μ^2

کدام است؟

(۱) $\bar{X}^2 - \frac{2\bar{X}S^2}{n}$

(۲) $\bar{X}^2 - \frac{\bar{X}S^2}{n}$

(۳) $\bar{X}^2 + \frac{\bar{X}S^2}{n}$

(۴) $\bar{X}^2 + \frac{2\bar{X}S^2}{n}$

۱۳۴- فرض کنید X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در فاصله $(0, \theta)$ باشند. اگر برای آزمون فرض
 $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta = 2$ ناحیه بحرانی به صورت $X_1 + X_2 > \frac{1}{\gamma}$ باشد، توان آزمون کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{7}{8}$

(۳) $\frac{15}{16}$

(۴) $\frac{31}{32}$

۱۳۵- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد. پر توان ترین آزمون در سطح α برای آزمون
 $H_0: X \sim f_0$ در مقابل $H_1: X \sim f_1$ کدام است؟

$$f_0(x) = \begin{cases} 4x & ; 0 < x < \frac{1}{2} \\ 4(1-x) & ; \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}, \quad f_1(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

(۱) $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x - \frac{1}{2}| > \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

(۲) $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x - \frac{1}{2}| < \sqrt{\frac{\alpha}{4}} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

(۳) $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x - \frac{1}{2}| > \sqrt{\frac{\alpha}{4}} + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

(۴) $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x - \frac{1}{2}| < \sqrt{\frac{\alpha}{4}} + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

۱۳۶- فرض کنید X یک تک مشاهده از تابع چگالی احتمال زیر باشد
 $f_{\theta}(x) = 2\theta x + 1 - \theta$; $0 < x < 1$, $-1 < \theta < 1$

پرتوان ترین آزمون یکنواخت با اندازه α برای آزمون $H_0: \theta \leq 0$ در مقابل $H_1: \theta > 0$ کدام است؟

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 - \alpha \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x < \alpha \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 - \alpha \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x > \alpha \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (4)$$

۱۳۷- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت روی بازه $(\theta - \rho, \theta + \rho)$ باشد. اگر $\lambda(X_1, \dots, X_n)$ آماره‌ی آزمون نسبت درستنمایی برای انجام آزمون فرض $H_0: \rho = \rho_0$ در مقابل $H_1: \rho \neq \rho_0$ باشد،

توزیع دقیق $\sqrt{\lambda(X_1, \dots, X_n)}$ کدام است؟

$$\chi^2_{(2n)} \quad (1)$$

$$\chi^2_{(n-1)} \quad (2)$$

$$\text{Beta}(n, 1) \quad (3)$$

$$\text{Beta}(n-1, 2) \quad (4)$$

۱۳۸- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع زیر باشد،

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|} \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty$$

اگر فاصله $(\min_{1 \leq i \leq n} X_i, \max_{1 \leq i \leq n} X_i)$ را به عنوان فاصله اطمینان برای θ در نظر بگیریم ضریب اطمینان آن کدام است؟

$$1 - \frac{1}{2^n} \quad (1)$$

$$1 - \frac{1}{2^{n-2}} \quad (2)$$

$$1 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad (3)$$

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad (4)$$

۱۳۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, \sigma^2)$ باشد. اگر $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ و $(0, S)$ یک فاصله

اطمینان برای σ باشد، ضریب اطمینان این فاصله برای n های بزرگ تقریباً کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(x-\theta)}$ ، $x > \theta$ ، $\theta > 0$ باشد.

بازة اطمینان $(1-\alpha)100\%$ درصدی با دم‌های برابر بر اساس $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{X_{(1)}}{1 - \frac{1}{n} \ln \frac{\alpha}{2}}, \frac{X_{(1)}}{1 - \frac{1}{n} \ln(1 - \frac{\alpha}{2})})$
- (۲) $(\frac{X_{(1)}}{-\frac{1}{n} \ln \frac{\alpha}{2}}, \frac{X_{(1)}}{-\frac{1}{n} \ln(1 - \frac{\alpha}{2})})$
- (۳) $(\frac{X_{(1)}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \ln \frac{\alpha}{2}}, \frac{X_{(1)}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \ln(1 - \frac{\alpha}{2})})$
- (۴) $(\frac{X_{(1)}}{1 + \frac{1}{n} \ln \frac{\alpha}{2}}, \frac{X_{(1)}}{1 + \frac{1}{n} \ln(1 - \frac{\alpha}{2})})$

۱۴۱- اگر $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ ، که در آن a_n و b_n اعداد گویا هستند، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۲) $\sqrt{2}$
- (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $2\sqrt{2}$

۱۴۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) ۱
- (۳) e
- (۴) ∞

۱۴۳- مقدار $\sup \{ \sqrt[n]{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots \}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) $\sqrt[4]{4}$
- (۳) ۲
- (۴) e

۱۴۴- مقدار $A = 2 + 3 + \frac{12}{4} + \frac{20}{8} + \frac{30}{16} + \frac{42}{32} + \frac{56}{64} + \dots$ کدام است؟

- (۱) ۲۰
- (۲) ۱۸
- (۳) ۱۶
- (۴) ۱۲

۱۴۵- اگر مشتق تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ همه جا منفی باشد و $f(0) = 1$ و $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = -\frac{1}{1+x^2}$ ، آنگاه مقدار $\int_0^1 f^{-1}(x) dx$

کدام است؟

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{2} \ln 2$

(۴) ∞

۱۴۶- ضریب زاویه خط عمود بر منحنی $x^3 + y^3 = 28$ در نقطه‌ای به طول یک کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{12}$

(۲) $-\frac{1}{9}$

(۳) $\frac{1}{12}$

(۴) ۹

۱۴۷- نقطه‌های $P(0, 0, 0)$ ، $Q(0, 1, -1)$ نقاط بحرانی تابع $f(x, y, z) = x^2 + 12yz + (y - z)^2$ هستند. نوع این نقاط کدام است؟

(۱) نقطه زینی و Q نقطه مینیمم

(۲) P و Q هر دو نقطه زینی

(۳) P و Q هر دو نقطه ماکسیمم

(۴) P و Q هر دو نقطه مینیمم

۱۴۸- مقدار شار برونسوی از نیم کره بسته $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، $z \geq 0$ ، توسط میدان $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, 2y)$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) $\frac{\pi}{2}$

(۳) π

(۴) 2π

۱۴۹- مقدار $\iint_R \sqrt{xy} \, dx \, dy$ که در آن $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$
- (۲) $\frac{2}{9}$
- (۳) $\frac{4}{9}$
- (۴) ۱

۱۵۰- مقدار کار انجام شده بوسیله $\vec{F} = -x^2y\vec{i} + \arctan y^2\vec{j}$ در امتداد مربع به رئوس $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$ که در جهت مثبت طی می‌شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{6}{3}$

۱۵۱- با این فرض که u تابعی هموار از دو متغیر x و t است و $\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ، عبارت $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ برابر است با:

- (۱) $(-1)^k \alpha^k \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$
- (۲) $(-1)^k \alpha^k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$
- (۳) $(-1)^k \alpha^k \frac{\partial^{rk} u}{\partial t^{rk}}$
- (۴) $(-1)^k \alpha^k \frac{\partial^{rk} u}{\partial t^{rk}}$

۱۵۲- فرض کنید تابع دو متغیره حقیقی f تا مرتبه ۳ به طور پیوسته مشتق پذیر باشد. در اینصورت

$$\nabla \operatorname{div}(\nabla f) - (f_{xxx} \bar{i} + f_{yyy} \bar{j})$$

برابر است با:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (f_x \bar{i} + f_y \bar{j}) \quad (۱)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (f_y \bar{i} - f_x \bar{j}) \quad (۲)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (f_x \bar{i} - f_y \bar{j}) \quad (۳)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (f_y \bar{i} + f_x \bar{j}) \quad (۴)$$

۱۵۳- برای منحنی $r = a(1 - \cos \theta)$ شعاع انحنای کدام است؟

$$\rho = \frac{2a |\cos \theta / 2|}{3} \quad (۱)$$

$$\rho = \frac{2a |\sin \theta / 2|}{3} \quad (۲)$$

$$\rho = \frac{4a |\cos \theta / 2|}{3} \quad (۳)$$

$$\rho = \frac{4a |\sin \theta / 2|}{3} \quad (۴)$$

۱۵۴- اگر $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و $\{x_n\}$ یک دنباله در \mathbb{R} باشد، گزینه صحیح کدام است؟

(۱) اگر $\{x_n\}$ واگرا باشد آنگاه $\{f(x_n)\}$ نیز واگراست.

(۲) اگر $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در \mathbb{R} باشد آنگاه $\{f(x_n)\}$ نیز در \mathbb{R} کوشی است.

(۳) اگر $\{x_n\}$ همگرا باشد لزومی ندارد $\{f(x_n)\}$ همگرا باشد.

(۴) اگر $\{x_n\}$ یکنوا باشد، $\{f(x_n)\}$ لزوماً همگرا نیست.

۱۵۵- کدام تابع بر دامنه داده شده پیوسته یکنواخت است؟

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (۲)$$

$$f(x) = \tan x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad (۳)$$

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (0, 1) \quad (۴)$$

۱۵۶- دنباله $\{x_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_1 = 1, x_2 = 1 \text{ و } x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, n \geq 2$$

مقدار $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ∞

۱۵۷- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد. در این صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + mh) - f(x_0 - nh)}{h}$ برابر است با:

(۱) $(m+n)f'(x_0)$

(۲) $(mn)f'(x_0)$

(۳) $(m-n)f'(x_0)$

(۴) $(n-m)f'(x_0)$

۱۵۸- کدام گزینه صحیح است؟

(۱) هر زیر مجموعه فشرده در \mathbb{R} همبند است.

(۲) هر زیر مجموعه فشرده در \mathbb{R} کامل است.

(۳) هر زیر مجموعه کامل ناتهی در \mathbb{R} ناشمارا است.

(۴) هر زیر مجموعه همبند در \mathbb{R} کامل است.

۱۵۹- فرض کنید X و Y دو فضای متریک و $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. کدام شرط تضمین می‌کند که f پیوسته باشد؟

(۱) برای هر $F \subseteq Y$ بسته، $f^{-1}(F)$ در X فشرده باشد.

(۲) برای هر $F \subseteq Y$ فشرده، $f^{-1}(F)$ در X فشرده باشد.

(۳) برای هر $E \subseteq X$ فشرده، $f(E)$ در Y فشرده باشد.

(۴) برای هر $E \subseteq X$ بسته، $f(E)$ در Y فشرده باشد.

۱۶۰- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) در فضای متریک کامل (complete) هر دنباله کراندار دارای زیر دنباله‌ای همگراست.
- (۲) در فضای متریک کامل \mathbb{R}^k با متریک اقلیدسی هر دنباله کراندار دارای زیر دنباله‌ای همگراست.
- (۳) هر فضای متریک گسسته کامل است.
- (۴) هر فضای متریک فشرده کامل است.