

636

E

نام :
نام خانوادگی :
محل امضاء :

عصر جمعه
۹۲/۱۱/۱۸



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل – سال ۱۳۹۳

آمار و کاربردها – کد ۱۲۰۷

تعداد سؤال: ۱۳۵
مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۵	۳۱	۷۵
۳	دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱)	۶۰	۷۶	۱۳۵

بهمن ماه سال ۱۳۹۲
استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.
این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ و تکثیر سؤالات پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

Part A: Vocabulary

Directions: Choose the word or the phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark your answer sheet.

- 1- Police officers should be commended for their _____ service to the community.
1) benevolent 2) harsh 3) hasty 4) peculiar
- 2- Despite her _____ arguments, the candidate attracted an enthusiastic following.
1) plausible 2) wholesome 3) specious 4) thorough
- 3- Toni has been _____ to achieve musical recognition for the past ten years.
1) prevailing 2) displaying 3) appreciating 4) striving
- 4- Thousands of families came here seeking _____ from the civil war.
1) remedy 2) refuge 3) remnant 4) rebellion
- 5- Many persons in the _____ were awakened by the blast, and some were thrown from their beds.
1) thrill 2) urbanity 3) vicinity 4) fatigue
- 6- I cannot believe that your parents would _____ such rude behavior.
1) endorse 2) hinder 3) postpone 4) seclude
- 7- Although I had already broken most of her dishes, Jacqueline was _____ enough to continue letting me use them.
1) thrifty 2) indigent 3) financial 4) magnanimous
- 8- Even when someone has been found innocent of a crime, the _____ often remains.
1) endeavor 2) stigma 3) urge 4) quest
- 9- I was badly scared when the explosion made the whole house _____.
1) vacillate 2) resurge 3) decline 4) quake
- 10- The poison produced by the frog's skin is so _____ that it can paralyze a bird or a monkey immediately.
1) pungent 2) swift 3) lethal 4) treacherous

Part B: Cloze Passage

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark your answer sheet.

Air pollution has always accompanied civilizations. Pollution started from the prehistoric times when man created the first fires. According to (11) _____ in the journal *Science*, "soot (12) _____ on ceilings of prehistoric caves provides ample evidence of the high levels of pollution that was associated with (13) _____." The forging of metals appears to be a key turning point (14) _____ significant air pollution levels outside the home. Core samples of glaciers in Greenland indicate (15) _____ in pollution associated with Greek, Roman and Chinese metal production, but at that time the pollution was comparatively less and could be handled by nature.

- 11- 1) a 1983 article 2) article for 1983 3) a 1983rd article 4) article in 1983
- 12- 1) was found 2) having found 3) found 4) to be found
- 13- 1) inadequate ventilating open fires 2) inadequate ventilation of open fires
3) open fires inadequate ventilation 4) open fires in inadequate ventilation
- 14- 1) for creation in 2) in creation for 3) in the creating for 4) in the creation of
- 15- 1) increases 2) increased 3) the increasing 4) they increased

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

Passage 1:

All Models are Theoretical: There Are No Perfect Spheres in the Universe

It appears that the most common geometric form in the universe is the sphere. But how many mathematically perfect spheres are there in the universe? The answer is none. Neither the Earth, nor the Sun, nor a billiard ball is a perfect sphere. So if there are no true spheres, what good are the formulas for ascertaining the area or volume of a sphere? So it is with statistical models in general and, in particular, with a normal distribution. Although one of the most commonplace examples is height distribution, if we were to have at our disposal, the height of every adult on the planet, the histogram profile would not correspond to a Gaussian bell curve, not even if the data were stratified by gender, race, or any other characteristic. But the normal distribution model still provides approximate results that are good enough for practical purposes.

- 16- **How many perfect spheres are in the universe?**
 1) Many 2) A few 3) Only one 4) None
- 17- **"At our disposal" in line 6 means -----.**
 1) available for us 2) possible for us 3) in our position 4) in our postbox
- 18- **Is there a population with perfect normal distribution?**
 1) Yes 2) No 3) Perhaps 4) Many
- 19- **The normal model may be useful in -----.**
 1) practice 2) class 3) books 4) nature
- 20- **Which of the following is not part of a comparison made in the passage?**
 1) Earth 2) Billiard board 3) Moon 4) Sun

Passage 2:

In probability theory, central limit theorems (CLTs), broadly speaking, state that the distribution of the sum of a sequence of random variables (r.v.'s), suitably normalized, converges to a normal distribution as their number n increases indefinitely. However, the preceding convergence in distribution holds only under certain conditions, depending on the underlying probabilistic nature of this sequence of r.v.'s. If some of the assumed conditions are violated, the convergence may or may not hold, or if it does, this convergence may be to a nonnormal distribution. We shall illustrate this via a few counter examples. While teaching CLTs at an advanced level, counter examples can serve as useful tools for explaining the true nature of these CLTs and the consequences when some of the assumptions made are violated.

- 21- **CLT's are true -----.**
 1) without any condition 2) with some conditions
 3) only for normal variables 4) only for binomial variables
- 22- **CLT's are stated about -----.**
 1) a sum 2) a normalized sum 3) a finite sequence 4) an infinite sequence
- 23- **"violated" in line 6 means -----.**
 1) disobeyed 2) varied 3) valued 4) vanished

- 24- "Consequences" in line 9 means -----.
- 1) methods 2) results 3) wages 4) reports
- 25- Counter examples are useful tools -----.
- 1) make CLT's easy 2) shorten CLT's
- 3) explain CLT's 4) prove CLT's

Passage 3:

Taking all Decisions With the Same Probability

of Error is Not Reasonable: Forgetting an Umbrella or Driving on the Left Over a Blind Hill

If you leave the house one morning and shortly afterward find out that the probability of rain is 10%, you may decide not to return home for an umbrella. The probability of an error in this decision is 10%, but nobody would accuse you of being foolish. But if you were driving down an infrequently used road and came upon a blind hill with a pothole in your lane, would you drive on the left to avoid it? Few cars use this road and there is a low probability that another oncoming car will be in the left lane as you pass, but you most likely would not drive on the left because the consequences of an error would be extremely grave. It is not sensible to unify the probability of error when making decisions. In some cases, 10% is reasonable, but in others, not even 1 in 1000 is acceptable.

- 26- Taking all decisions with the same probability is -----.
- 1) reasonable 2) fair 3) foolish 4) logical
- 27- If the probability of rain is 0.09, you decide to -----.
- 1) stay home 2) take an umbrella with you
- 3) wait for sunshine 4) leave home without an umbrella
- 28- "Sensible" in line 7 means -----.
- 1) simple 2) reasonable 3) severe 4) serious
- 29- If a road has a blind hill -----.
- 1) all cars use it 2) a few cars use it
- 3) few cars use it 4) expensive cars use it
- 30- "Grave" in line 7 means -----.
- 1) very serious 2) great 3) hand 4) equal

۳۱- در کدام بازه سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{(n+1)3^n}$ همگرا است؟

(۱) $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(۲) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(۳) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$

(۴) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

۳۲- با فرض پیوستگی تابع g ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)g(t)dt}{\sin^2 x}$ کدام است؟

(۱) $2g(0)$

(۲) ۱

(۳) $\frac{1}{2}g(0)$

(۴) $g(0)$

۳۳- مقدار $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(۳) ۲

(۴) $\frac{\pi}{8}$

۳۴- اگر $\frac{d}{dx}(f(x)) = g(x)$ و $\frac{d}{dx}(g(x)) = f(x)$ ، مقدار $\frac{d^2}{dx^2}(f(x^3))$ کدام است؟

(۱) $9x^4 f(x^6) + 6xg(x^3)$

(۲) $f(x^6) + g(x^3)$

(۳) $9x^4 f(x^3) + 6xg(x^6)$

(۴) $f(x^3) + g(x^6)$

۳۵- مساحت ناحیه محدود به نمودار معادله $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۶- اگر θ زاویه بین بردار نرمال بر رویه $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ در

نقطه $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ و محور z ها باشد و $L = \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} |\cos \theta|$ ، گزینه

صحیح کدام است؟

(۱) $L = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $L = 0$

(۳) $L = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $L = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۷- اگر $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 = 2 \right\}$ ، مقدار انتگرال دوگانه

$\iint_D (x^2 - xy + y^2) dA$ کدام است؟

(۱) $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$

(۳) $\frac{8\pi}{3}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

۳۸- برای ثابت $k > 0$ ، اگر $g(x, t) = \frac{x}{\sqrt{kt}}$ و $f(x, t) = \int_0^{g(x,t)} e^{-u^2} du$

گزینه صحیح کدام است؟

$$k \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2)$$

$$k \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4)$$

۳۹- بیشترین انحنای منحنی $y = e^x$ در کدام نقطه اتفاق می افتد؟

$$\left(\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (1)$$

$$(-\ln 2, \sqrt{2}) \quad (2)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (3)$$

$$(\ln 2, \sqrt{2}) \quad (4)$$

۴۰- کدام یک از گزاره‌های ذیل خاصیت مشخصه زیریننه (اینفیمم) را برای

$$\beta = \inf A \text{ مشخص می‌کند؟}$$

$$\forall x(x \in A \Rightarrow \beta \leq x) \& \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \quad x < \beta + \varepsilon \quad (۱)$$

$$\forall x \in A \exists \varepsilon > 0 \quad x < \beta + \varepsilon \quad (۲)$$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x(x \in A \Rightarrow x < \beta + \varepsilon) \quad (۳)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \quad x < \beta + \varepsilon \quad (۴)$$

۴۱- فرض کنید $f: X \rightarrow X$ تابعی باشد به طوری که $f^2 = I_X$ که در آن I_X بیانگر

تابع همانی روی X است. در این صورت:

$$(۱) \quad f \text{ متعددی (تراگذری) است.} \quad (۲) \quad f \text{ متقارن است.}$$

$$(۳) \quad f \text{ انعکاسی و متعددی (تراگذری) است.} \quad (۴) \quad f \text{ انعکاسی و متقارن است.}$$

۴۲- فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. کدام یک از

گزاره‌های زیر درست است؟

$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A \quad (۲) \quad f(A^c) = (f(A))^c \quad (۱)$$

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \quad (۴) \quad B \subseteq f(f^{-1}(B)) \quad (۳)$$

۴۳- کدام یک از نگاهش‌های زیر یک تناظر یک به یک (دو سوئی) بین بازه باز

$(-1, 1)$ و \mathbb{R} برقرار می‌کند؟

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (۲) \quad f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|} \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \quad (۴) \quad f(x) = \frac{x}{1-|x|} \quad (۳)$$

۴۴- هرگاه X یک مجموعه نامتناهی و Q مجموعه اعداد گویا باشد، آنگاه

(۱) اگر $f: X \rightarrow X$ پوشا باشد آنگاه f یک به یک است.

(۲) تابعی یک به یک مانند $f: X \rightarrow Q$ وجود دارد.

(۳) اگر تابع $f: X \rightarrow X$ یک به یک باشد آنگاه f پوشاست.

(۴) تابعی یک به یک مانند $f: Q \rightarrow X$ وجود دارد.

۴۵- اگر تابع $f: A \rightarrow B$ پوشا باشد آنگاه:

$$(۱) \exists X \exists Z (X, Z \subseteq A \text{ \& } f(X \cup Z) \neq f(X) \cup f(Z)$$

$$(۲) \forall Y (Y \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) = Y$$

$$(۳) \forall X \forall Z (X, Z \subseteq A \Rightarrow f(X \cap Z) = f(X) \cap f(Z)$$

$$(۴) \forall X (X \subseteq A \Rightarrow f^{-1}(f(X)) = X$$

دروس پایه - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

۴۶- تحت کدام یک از شرایط زیر ماتریس A با یک ماتریس قطری متشابه است؟

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ a & ۲ & ۰ \\ b & c & -۱ \end{bmatrix}$$

$$(۱) a + b + c = ۰$$

$$(۲) b = ۰$$

$$(۳) c = ۰$$

$$(۴) a = ۰$$

۴۷- فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ مختلط باشد و برای هر $X \in \mathbb{R}^n$

(بردارها را ستونی در نظر می‌گیریم) داشته باشیم $X^T A X = 0$.

که در آن X^T ترانهادهی X است، در این صورت:

$$A = 0 \quad (1)$$

$$A^T A^2 = 0 \quad (2)$$

$$A^T = A \quad (3)$$

$$A^T = -A \quad (4)$$

۴۸- فرض کنید V فضای برداری توابع پیوسته از مجموعه $[0, 1]$ به \mathbb{R} روی میدان

\mathbb{R} باشد. تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(f(x)) = \int_0^1 (3x^3 y - 5x^4 y^2) f(y) dy$$

در این صورت رتبه T برابر است با:

$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4) \text{ نامتناهی}$$

۴۹- دو جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

(*) اگر به ازای بردار ثابت b ، دستگاه $Ax = b$ روی اعداد حقیقی بیش از یک

جواب داشته باشد، آنگاه دستگاه $Ax = 0$ بی‌نهایت جواب دارد.

(**) اگر u, v, w بردارهایی در \mathbb{R}^2 باشند به طوری که هیچ دوتای آن‌ها هم

راستا نباشند، آنگاه دستگاه $Ax = w$ که در آن $A = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$ ، جواب یکتا دارد.

کدام گزینه صحیح است؟

(۱) فقط (*) درست است.

(۲) فقط (**) درست است.

(۳) هر دو درست هستند.

(۴) هر دو نادرست هستند.

۵۰- فرض کنید U_1, U_2, U_3 سه زیر فضا از یک فضای برداری با بعد متنهایی باشند به طوری که اشتراک هر دوتای آنها صفر است. کدام گزینه صحیح است؟

$$\dim \left(\sum_{i=1}^3 U_i \right) = \sum_{i=1}^3 \dim(U_i) + \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 + U_3) + \dim(U_2 + U_3) \quad (1)$$

$$\dim \left(\sum_{i=1}^3 U_i \right) + \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_2 + U_3) + \dim(U_1 + U_3) \quad (2)$$

$$\leq \sum_{i=1}^3 \dim(U_i)$$

$$\dim \left(\sum_{i=1}^3 U_i \right) + \sum_{i=1}^3 \dim(U_i) \leq \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 + U_3) \quad (3)$$

$$+ \dim(U_2 + U_3)$$

$$\dim \left(\sum_{i=1}^3 U_i \right) = \sum_{i=1}^3 \dim U_i \quad (4)$$

۵۱- فرض کنید A ماتریسی 8×4 باشد که درایه‌های آن اعدادی حقیقی هستند.

بعلاوه فرض کنید $W_1 = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^4\}$ و $W_2 = \{AY \mid Y \in \mathbb{C}^4\}$. اگر

W_1 به عنوان زیر فضای \mathbb{R}^8 بعدی n و W_2 به عنوان زیر فضای \mathbb{C}^8 بعدی m

بعدی باشند، کدام مورد صحیح است؟

$$m = n \quad (1)$$

$$n = 2m \quad (2)$$

$$m = 2n \quad (3)$$

$$m = n + 4 \quad (4)$$

۵۲- متر d را بر \mathbb{R} به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $x_n \rightarrow x$ در متر اقلیدسی، آنگاه $x_n \rightarrow x$ در متر d

(۲) (\mathbb{R}, d) یک فضای متریک کامل است.

(۳) (\mathbb{R}, d) یک فضای متریک کراندار است.

(۴) اگر $U \subseteq \mathbb{R}$ نسبت به متر d باز باشد نسبت به متر اقلیدسی \mathbb{R} نیز باز است.

۵۳- فرض کنید متر d روی \mathbb{R} به صورت زیر تعریف شده باشد. (A^c متمم A است)

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \sqrt{x^2 + y^2} & x \neq y \end{cases}$$

هرگاه $A \subseteq \mathbb{R}$ ، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $A \not\ni \circ$ آنگاه A^c باز است.

(۲) اگر $A \not\ni \circ$ آنگاه A^c بسته است.

(۳) اگر $\circ \in A$ آنگاه A^c باز است.

(۴) اگر $\circ \in A$ آنگاه $A^c \cup \{\circ\}$ بسته است.

۵۴- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(۱) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ناهمبند است.

(۲) $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, 0)\}$ همبند است.

(۳) $\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ دارای نقطه حدی است.

(۴) $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, 0)\}$ فشرده است.

۵۵- اگر $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \tan^{-1}(n) + \cos(n)$ مقدار $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

برابر است با:

$$1 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} \quad (1) \qquad 1 + \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (4) \qquad \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^{-1} \quad (3)$$

۵۶- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد حقیقی باشد و $a_n \rightarrow 0$ در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

(۱) فقط در صورتی که $\sum a_n$ همگرا باشد، همگراست.

(۲) فقط در صورتی که $\sum a_n$ واگرا باشد، همگراست.

(۳) واگرا است.

(۴) همگرا است.

۵۷- فرض کنید سری توانی $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بر \mathbb{R} همگرا باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر $\{x : f(x) = 0\}$ نامشمارا باشد آنگاه f ثابت است.

(۲) اگر $\{x : f'(x) = 0\}$ نامشمارا باشد آنگاه f ثابت است.

(۳) اگر $\{x : f(x) = 0\}$ یا $\{x : f'(x) = 0\}$ نامشمارا باشد آنگاه f ثابت است.

(۴) همه موارد صحیح است.

۵۸- فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند و $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. کدام

گزینه پیوستگی تابع f را نتیجه نمی‌دهد؟

(۱) برای هر دنباله همگرای $\{x_n\}$ در X دنباله $\{f(x_n)\}$ در Y همگرا است.

(۲) برای هر دنباله کوشی $\{x_n\}$ در X ، دنباله $\{f(x_n)\}$ در Y کوشی است.

(۳) تصویر وارون هر مجموعه بسته در Y توسط f در X فشرده است.

(۴) تصویر وارون هر مجموعه فشرده در Y توسط f در X فشرده است.

۵۹- کدام یک از توابع زیر بر $(0, \infty)$ پیوسته یکنواخت است؟

(۱) $x \sin x$

(۲) $x \ln x$

(۳) $x \sin \frac{1}{x}$

(۴) e^x

۶۰- کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر تابع f بر $[a, b]$ انتگرال پذیر ریمان باشد آنگاه تابع f بر $[a, b]$ تابع اولیه

(یادمشتق) دارد.

(۲) اگر تابع f بر $[a, b]$ تابع اولیه داشته باشد آنگاه f بر $[a, b]$ انتگرال پذیر

ریمان است.

(۳) اگر برای هر $x \in [a, b]$ انتگرال $\int_a^x f(t) dt$ موجود باشد آنگاه f بر $[a, b]$

تابع اولیه دارد.

(۴) هیچ کدام

۶۱- فرض کنید $f, g : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ توابع پیوسته باشند. مقدار

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) g(x) dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

حد کدام است؟

(۲) $\inf_{a \leq x \leq b} f(x)$

(۱) $\inf_{a \leq x \leq b} f(x)g(x)$

(۴) $\sup_{a \leq x \leq b} f(x)g(x)$

(۳) $\sup_{a \leq x \leq b} f(x)$

۶۲- کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر $0 < a < 1$ ، آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ بر $[-a, a]$ همگرای یکنواخت است.

(۲) دنباله توابع $f_n(x) = x^n$ بر $(0, 1)$ همگرای یکنواخت است.

(۳) اگر f_n به f و g_n به g همگرای یکنواخت بر \mathbb{R} باشند، آنگاه $f_n g_n$ به fg همگرای یکنواخت بر \mathbb{R} است.

(۴) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.

۶۳- هرگاه $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} [nx]$ ، $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^3 + n^2}{n}$ ، آنگاه کدام

گزینه نادرست است؟

(۱) g بر هر بازه کراندار $[a, b]$ ، انتگرال ریمن دارد.

(۲) f بر هر بازه کراندار $[a, b]$ ، انتگرال ریمن دارد.

(۳) g بر هر بازه کراندار $[a, b]$ ، بطور مطلق همگرای یکنواخت است.

(۴) f بر هر بازه کراندار $[a, b]$ ، به طور مطلق همگرای یکنواخت است.

۶۴- در یک دستگاه ممیز شناور برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۲، با ۷ رقم مانتیس و روش گرد کردن، فاصله بین عدد ۶۹ و نزدیکترین عدد قابل نمایش بزرگتر از ۶۹ چقدر است؟

(۱) ۲

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{1}{64}$

۶۵- فرض کنید دنباله تکراری روش نیوتن برای حل معادله $f(x) = 0$ به صورت $x_{n+1} = x_n(2 - Ax_n)$ باشد، آنگاه ضابطه $f(x)$ کدام گزینه است؟ (A عددی ثابت و غیر صفر است.)

(۱) $f(x) = A - 2x^2$

(۲) $f(x) = \frac{2}{A} - x^2$

(۳) $f(x) = \sqrt{A} - x$

(۴) $f(x) = A - \frac{1}{x}$

۶۶- تابع $\sin x$ را با چه اندازه گام h باید جدول بندی کرد تا خطای حاصل از درونیایی

خطی از $10^{-4} \times \frac{1}{3}$ بیشتر نشود؟

(۱) ۰٫۰۴

(۲) ۰٫۰۳

(۳) ۰٫۰۳۵

(۴) ۰٫۰۲

۶۷- در رابطه انتگرال گیری زیر، مقدار پارامتر A_1 بر حسب a کدام گزینه باشد تا روش انتگرال گیری مورد نظر دارای بیشترین دقت ممکن باشد؟

$$\int_{-1}^1 (a-x)f(x)dx \approx A_{-1}f(-1) + A_0f(0) + A_1f(1)$$

(۱) $\frac{1}{3}(-1+a)$

(۲) $3a - \frac{1}{3}$

(۳) $\frac{3}{2}(a+1)$

(۴) $\frac{a}{3} + 1$

۶۸- فرض کنید A ، ماتریس $n \times n$ ، حقیقی و وارون پذیر است. A دارای تجزیه LU است که L پایین مثلثی با اعضای قطری واحد و U بالا مثلثی است، اگر A ماتریسی باشد.

(۱) نواری

(۲) معین مثبت

(۳) متقارن

(۴) پاد متقارن

۶۹- فرض کنید $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ، $S = [1, \infty)$ و $f(x) = 3x_1^2 - 2x_1^2 + 27x_1 - x_1^2$.

ماکسیمم محلی (موضعی) تابع f روی S کدام است؟

(۱) ۵۵

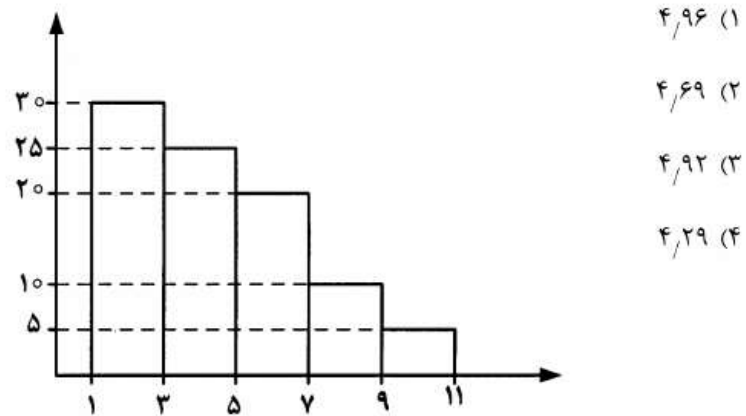
(۲) ۵۳

(۳) ۵۴

(۴) ۵۲

۷۰- اگر نمودار هیستوگرام فراوانی داده‌ها به صورت زیر باشد، مقدار $Q_{0.60}$

(چندک ۰/۶۰) کدام است؟



۴,۹۶ (۱)

۴,۶۹ (۲)

۴,۹۲ (۳)

۴,۲۹ (۴)

۷۱- اگر قیمت کالایی امسال ۲۰ درصد نسبت به سال گذشته افزایش داشته باشد،

ضرب تغییرات قیمت کالا چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) قرینه می‌شود.

(۲) افزایش می‌یابد.

(۳) کاهش می‌یابد.

(۴) تغییر نمی‌کند.

۷۲- نامعادله $X + Y + Z < 12$ در مجموعه اعداد صحیح نا منفی دارای چند جواب

است؟

۳۴۶ (۱)

۳۶۴ (۲)

۳۵۶ (۳)

۳۶۵ (۴)

۷۳- چهار نفر اسم خود را روی ۴ کارت می‌نویسند و داخل جعبه‌ای می‌اندازند. اگر این چهار نفر هر کدام یک کارت از جعبه انتخاب کند، احتمال اینکه هیچکدام اسم خود را درنیاورند چقدر است؟

$$\frac{7}{16} \quad (1)$$

$$\frac{3}{8} \quad (2)$$

۷۴- از جعبه‌ای که حاوی ۵ لامپ است ۱۰ لامپ انتخاب می‌گردد. اگر لامپ‌های معیوب حداکثر ۱ باشد، جعبه انتخاب می‌شود در غیر این صورت جعبه رد می‌شود. اگر ۱۰ لامپ معیوب در جعبه وجود داشته باشد، احتمال انتخاب جعبه کدام است؟

$$\frac{9}{49} \quad (1) \quad \frac{\binom{10}{1} \binom{40}{9}}{\binom{50}{10}} + \frac{\binom{40}{10}}{\binom{50}{10}}$$

$$\frac{1}{5} \quad (2) \quad \frac{\binom{40}{9}}{\binom{50}{10}}$$

۷۵- اگر $P(A|B) + P(A'|B') = 1$ باشد در این صورت: (A' مکمل A است)

(۱) دو پیشامد A و B وابسته هستند.

(۲) دو پیشامد A و B مستقلند.

(۳) دو پیشامد A و B مکمل هم هستند.

(۴) دو پیشامد A و B از هم جدا هستند.

سطح زیر منحنی نرمال استاندارد										
z	0.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	9974	9975	9976	9977	9978	9979	9979	9979	9980	9981
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9985	9985	9986	9986	9987
3.0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3.1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3.2	9993	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9995	9995
3.3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997
3.4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

مقادیر بحرانی توزیع t									
df	.10	.05	.025	.01	.005				
1	1.808	6.314	12.71	31.82	63.66				
2	1.886	2.200	4.301	6.965	9.925				
3	1.898	2.353	3.182	4.541	5.841				
4	1.533	2.133	2.776	3.747	4.804				
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032				
6	1.441	1.943	2.447	3.143	3.707				
7	1.415	1.885	2.365	2.998	3.455				
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.358				
9	1.389	1.833	2.262	2.821	3.250				
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169				
11	1.356	1.796	2.201	2.717	3.106				
12	1.345	1.781	2.179	2.681	3.055				
13	1.337	1.771	2.160	2.650	3.012				
14	1.334	1.764	2.145	2.624	2.977				
15	1.331	1.759	2.131	2.602	2.947				
16	1.328	1.756	2.119	2.582	2.921				
17	1.326	1.754	2.109	2.564	2.898				
18	1.324	1.752	2.101	2.549	2.878				
19	1.323	1.751	2.093	2.536	2.861				
20	1.322	1.750	2.086	2.524	2.845				
21	1.321	1.749	2.080	2.514	2.831				
22	1.321	1.748	2.074	2.505	2.819				
23	1.320	1.747	2.069	2.497	2.807				
24	1.319	1.746	2.064	2.490	2.797				
25	1.318	1.745	2.060	2.484	2.787				
26	1.317	1.744	2.056	2.479	2.779				
27	1.316	1.743	2.052	2.473	2.771				
28	1.315	1.742	2.048	2.467	2.763				
29	1.314	1.741	2.045	2.462	2.756				
30	1.313	1.740	2.042	2.457	2.750				

مقادیر بحرانی توزیع مربع کای									
df	.995	.990	.975	.950	.900	.800	.700	.600	.500
1	48.5	0.001	0.0009	0.0039	3.8414	5.0238	6.6349	7.879	0.005
2	0.010	0.0201	0.0506	0.1032	5.9914	7.3777	9.2103	10.596	0.010
3	0.071	0.1416	0.2138	0.3518	7.8791	9.3484	11.344	12.838	0.020
4	0.206	0.2971	0.4644	0.7107	9.4877	11.143	13.276	14.860	0.050
5	0.411	0.5320	0.8312	1.1454	10.991	12.832	15.086	16.749	0.100
6	0.676	0.8320	1.2373	1.6353	12.591	14.449	16.811	18.547	0.200
7	0.989	1.2390	1.6908	2.1699	14.067	16.012	18.475	20.277	0.500
8	1.312	1.6455	2.1797	2.7168	15.507	17.534	20.090	21.954	1.000
9	1.646	2.0987	2.7003	3.2469	16.919	19.022	21.665	23.589	2.000
10	2.157	2.5922	3.2409	3.7964	18.307	20.483	23.209	25.188	5.000
11	2.601	3.0528	3.6197	4.2558	19.675	21.920	24.724	26.756	10.000
12	3.073	3.5016	3.9402	4.7326	21.026	23.338	26.216	28.307	20.000
13	3.565	3.9584	4.2607	5.2269	22.362	24.736	27.688	29.819	30.000
14	4.066	4.4340	4.5812	5.7388	23.685	26.119	29.141	31.319	40.000
15	4.574	4.9272	4.9017	6.2684	25.000	27.488	30.577	32.801	50.000
16	5.089	5.4379	5.2222	6.8157	26.296	28.845	31.999	34.267	60.000
17	5.611	5.9652	5.5437	7.3809	27.587	30.191	33.408	35.718	70.000
18	6.140	6.5091	5.8674	7.9641	28.869	31.526	34.805	37.156	80.000
19	6.676	7.0696	6.1968	8.5654	30.143	32.852	36.191	38.582	90.000
20	7.219	7.6477	6.5329	9.1849	31.410	34.169	37.566	39.996	95.000
21	7.769	8.2434	6.8764	9.8226	32.671	35.478	38.932	41.400	97.500
22	8.326	8.8578	7.2273	10.4785	33.924	36.778	40.282	42.795	99.000
23	8.890	9.4911	7.5844	11.1528	35.172	38.075	41.638	44.181	99.500
24	9.461	10.144	7.9477	11.8457	36.415	39.364	42.979	45.558	99.900
25	10.039	10.818	8.3181	12.5576	37.652	40.646	44.314	46.927	99.950
26	10.624	11.513	8.6957	13.2889	38.882	41.923	45.644	48.289	99.980
27	11.216	12.229	9.0807	14.0399	40.113	43.194	46.962	49.644	99.990
28	11.815	12.966	9.4734	14.8111	41.337	44.460	48.278	50.993	99.995
29	12.421	13.724	9.8740	15.6031	42.556	45.722	49.587	52.335	99.998
30	13.126	14.504	10.282	16.4166	43.772	46.979	50.892	53.671	99.999

۷۶- فرض کنید متغیر تصادفی X طول عمر یک لامپ روشنایی با تابع چگالی احتمال

$f(x) = ce^{-cx}$, $x > 0$ است. به ازای چه مقداری از c ، متغیر تصادفی X در

رابطه $P(X \geq 2) = 2P(X < 2)$ صدق می‌کند؟

$$\ln \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (1)$$

$$2 \ln \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} \quad (3)$$

۷۷- فرض کنید تعداد تصادفات رانندگی که هر شخص در یکسال مرتکب می‌شود

دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد. همچنین فرض کنید λ از شخصی به

شخص دیگر تغییر کند بنحوی که $P(\lambda < x) = 1 - e^{-x}$ باشد. اگر شخصی به

تصادف انتخاب شود احتمال اینکه هیچ تصادفی در سال نداشته باشد کدام

است؟

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

۷۸- فرض کنید N متغیر تصادفی با مقادیر ممکن صحیح نامنفی باشد. مستقلاً هر

یک از N توپ را در ظرف A با احتمال p و یا در ظرف B با احتمال $1-p$ قرار

می‌دهیم. N_A توپ در ظرف A و $N_B = N - N_A$ توپ در ظرف B قرار

می‌گیرد. اگر N دارای توزیع پواسن باشد، گزینه صحیح کدام است؟

(۱) N_B و N_A از یکدیگر مستقل‌اند.

(۲) N_B و N_A وابسته‌اند.

(۳) $N - N_A$ دارای توزیع فوق هندسی است.

(۴) N_A دارای توزیع فوق هندسی است.

۷۹- اگر $M(t) = (e^t - 1)t^{-1}$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X باشد، $E(X^{19})$

کدام است؟

(۱) $0/01$

(۲) $0/05$

(۳) $0/15$

(۴) $0/10$

۸۰- اگر X یک متغیر تصادفی با مقادیر ممکن صحیح مثبت باشد به قسمی که

$$P[X = j] = P[X = 1] \cdot P[X \geq j], \quad j \geq 1$$

آنگاه $E(X)$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{P(X=1)}$

(۲) $\frac{1}{1 - P(X=1)}$

(۳) $\frac{1 - P(X=1)}{P(X=1)}$

(۴) $\frac{P(X=1)}{1 - P(X=1)}$

۸۱- اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال زیر باشد، مقدار $P(X \leq \frac{2}{p})$ کدام

است؟

$$P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad q = 1 - p$$

(۲) $P(X \leq \frac{2}{p}) \geq q$

(۱) $P(X \leq \frac{2}{p}) < p$

(۴) $P(X \leq \frac{2}{p}) \geq p$

(۳) $P(X \leq \frac{2}{p}) < q$

۸۲- فرض کنید متغیر تصادفی a در فاصله $(0, 10)$ دارای توزیع یکنواخت باشد.

احتمال آنکه ریشه‌های معادله درجه دوم $4x^2 + 4ax + a + 5 = 0$ حقیقی باشند کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{3}{10}$

(۳) $\frac{4}{5}$

(۴) $\frac{7}{10}$

۸۳- فرض کنید X دارای توزیع لاگ نرمال با پارامتر μ و σ^2 باشد. اگر m میانه این توزیع باشد، گزینه صحیح کدام است؟ (Φ نمایانگر تابع توزیع نرمال استاندارد است)

(۱) $m = \frac{\frac{1}{2} - \mu}{\sigma}$

(۲) $\ln(m) = \frac{1}{2} - \mu\sigma$

(۳) $\Phi\left(\frac{\ln(m) - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}$

(۴) $\Phi(\ln(m)) = \frac{1}{2}\sigma + \mu$

۸۴- فرض کنید $X \sim NB(r, p)$ باشد، در این صورت متغیر تصادفی $Y = 2pX$

وقتی که $p \rightarrow 0$ دارای چه توزیعی می‌باشد؟

(۱) کای اسکور با ۲r درجه آزادی

(۲) کای اسکور با r درجه آزادی

(۳) پواسن با پارامتر r

(۴) پواسن با پارامتر ۲r

۸۵- متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور زیر می باشد، مقدار $P(X^2 - 4 = 0)$

$$M_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{2t}$$

کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{1}{2}$

۸۶- اگر X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $x \in \mathbb{R}$ ، $F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ باشد، مقدار

$$E\left\{\frac{F(x)}{F'(x)}\right\}$$

کدام است؟

(۱) $-\infty$

(۲) ۰

(۳) $+\infty$

(۴) $\frac{1}{2}$

۸۷- اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل برنولی با احتمال موفقیت p ، $0 < p < 1$ ،

باشند مقدار: $E(X^Y | X + Y = 1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) q

(۴) p

۸۸- متغیر تصادفی X که به طور یکنواخت روی $[0, 1]$ انتخاب می‌شود، این فاصله را به دو قسمت تقسیم می‌کند. اگر R نسبت قسمت کوچکتر به بزرگتر باشد تابع

چگالی احتمال R کدام است؟ ($0 < r < 1$) ($f_R(r) = ?$)

$$\frac{1}{2(r^2+1)} \quad (1) \qquad \frac{1}{2(r+1)^2} \quad (2)$$

$$\frac{2}{(r^2+1)} \quad (3) \qquad \frac{2}{(r+1)^2} \quad (4)$$

۸۹- فرض کنید X دارای توزیع کوشی استاندارد با تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

اگر $X^c = \begin{cases} X & |X| \leq c \\ 0 & |X| > c \end{cases}$ تابع

چگالی احتمال $Y = X^c$ در فاصله $[-c, c]$ کدام است؟

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+x} \tan^{-1} c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-c)^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\tan^{-1} c} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x-c)^2} \tan^{-1} c \quad (4)$$

۹۰- یک تاس سالم را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد ۶‌های مشاهده شده و Y

تعداد ۵‌های مشاهده شده باشند، $\text{cov}(X, Y)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{6} \quad (1) \qquad -\frac{5}{18} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3) \qquad \frac{3}{8} \quad (4)$$

۹۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ باشد، احتمال اینکه دامنه این نمونه برابر صفر باشد، کدام است؟

(۱) $\theta^n (1-\theta)^n$

(۲) $(1-\theta)^n$

(۳) $\theta^n (1-\theta)^{n-1} + \theta^{n-1} (1-\theta)$

(۴) $\theta^n + (1-\theta)^n$

۹۵- فرض کنید X_1, X_2, X_3 نمونه‌ای تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ باشد، اگر $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}$ نمایانگر آماره‌های ترتیبی باشند، کدام رابطه، توزیع میانه این نمونه را مشخص می‌کند؟

(۱) $P(X_{(2)} = 0) = (1-\theta)^2 (1+2\theta)$

(۲) $P(X_{(2)} = 1) = (1-\theta)\theta^2$

(۳) $P(X_{(2)} = 1) = 1 - \theta^2 (1-\theta)$

(۴) $P(X_{(2)} = 0) = (1-\theta)^2 (1-2\theta)$

۹۶- فرض کنید میانگین یک نمونه تصادفی به حجم n از جامعه زیر برابر $3/5$ شده

است. برآورد گشتاوری θ کدام است؟

$x \backslash$	۱	۳	۴
θ_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
θ_2	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$
θ_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

(۲) θ_2

(۱) θ_1

(۴) وجود ندارد.

(۳) θ_3

۹۷- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع جرم احتمال متعلق به خانواده زیر است.

$\theta \backslash X$	۰	۱	۲	۳
θ_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
θ_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

آماره بسنده برای θ براساس تک مشاهده X کدام است؟

$$T(x) = \begin{cases} 1 & x = 0, 2 \\ 0 & x = 1, 3 \end{cases} \quad (۲)$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, 2 \\ 0 & x = 0, 3 \end{cases} \quad (۱)$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, 3 \\ 0 & x = 0, 2 \end{cases} \quad (۴)$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 & x = 0, 1 \\ 0 & x = 2, 3 \end{cases} \quad (۳)$$

۹۸- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $B(1, \theta)$ ، $0 < \theta < 1$ باشد. با تعریف

$$T_1(\mathbf{X}) = (X_1, \dots, X_n), \quad T_2(\mathbf{X}) = (X_1^2, \dots, X_n^2)$$

$$T_3(\mathbf{X}) = \left(\sum_{i=1}^k X_i, \sum_{i=k+1}^n X_i \right), \quad T_4(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_5(\mathbf{X}) = \bar{X}$$

$$T_6(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad T_7(\mathbf{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

کدام یک از آماره‌های فوق بسنده هستند؟

(۱) همه T_i ها بسنده هستند.

(۲) به جز T_7 بقیه بسنده هستند.

(۳) به جز T_3 و T_6 بقیه بسنده هستند.

(۴) به جز T_6 بقیه بسنده هستند.

۹۹- فرض کنید X_1, \dots, X_{10} یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت روی فاصله

$$(-\theta, \theta) \text{ باشد. مقدار } E \left[\frac{X_{(10)} - X_{(1)}}{\max_{1 \leq i \leq 10} |X_i|} \right] \text{ کدام است؟ } (X_{(10)} \text{ و } X_{(1)} \text{ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین آماره ترتیبی نمونه تصادفی هستند.})$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱) \quad \frac{\theta}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{5} \quad (۳) \quad \frac{\theta}{5} \quad (۴)$$

۱۰۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $F_\theta(x - \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ است که در آن F_θ یک تابع توزیع پیوسته و اکیداً صعودی است. اگر برای $t \in \mathbb{R}$ و $i = 1, \dots, n$ متغیر تصادفی Y_i به صورت زیر تعریف شود:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & X_i \geq t \\ 0 & X_i < t \end{cases}$$

برآورد ماکزیمم درستنمایی (MLE) برای θ بر اساس Y_1, \dots, Y_n کدام است؟

(۱) $\hat{\theta} = F_\theta^{-1}(1 - \bar{y}) - t$

(۲) $\hat{\theta} = F_\theta^{-1}(\bar{y}) - t$

(۳) $\hat{\theta} = t - F_\theta^{-1}(\bar{y})$

(۴) $\hat{\theta} = t - F_\theta^{-1}(1 - \bar{y})$

۱۰۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از توزیعی با تابع جرم

x	۱	۲	۳
$f_\theta(x)$	θ	$1 - 2\theta$	θ

احتمال زیر باشد:

$$0 < \theta < \frac{1}{2}$$

اگر N_x را تعداد مشاهدات برابر با x تعریف نماییم. برآورد UMVU برای θ

کدام است؟

(۱) $\frac{N_3}{n}$

(۲) $\frac{N_1}{n}$

(۳) $\frac{n - N_2}{2n}$

(۴) $\frac{N_2}{2n}$

۱۰۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، در

کلاس برآوردهای σ^2 به شکل $T = CS^2$ که در آن

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

را داشته باشد؟

$$(1) \frac{n-1}{n+1} \quad (2) \frac{n+1}{n-1}$$

$$(3) \frac{n-1}{n} \quad (4) \frac{n}{n-1}$$

۱۰۳- تعداد موفقیت‌ها در ۷ بار مستقل از آزمایش برنولی با پارامتر θ برابر ۴ است. اگر

$\theta \in \{0/1, 0/2, \dots, 0/9\}$ باشد، برآورد ML پارامتر θ کدام است؟

(1) ۴/۰

(2) ۵/۰

(3) ۷/۰

(4) ۶/۰

۱۰۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $B(1, p)$ باشد. اگر

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{و} \quad \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

باشند، مقدار $E(\bar{X}\bar{X}^2)$ کدام است؟

$$(1) p(1-p) + \frac{p^2}{n} \quad (2) \frac{p(1-p)}{n} + p^2$$

$$(3) \frac{p(1-p)}{n-1} + \frac{p^2}{n} \quad (4) \frac{p(1-p)}{n(n-1)} + p^2$$

۱۰۵- فرض کنید X_1 دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس ۱ باشد و X_2 مستقل از X_1 دارای توزیع نرمال با میانگین 2μ و واریانس ۱ باشد. قرار دهید

$$T_2 = 2X_1 + X_2 \text{ و } T_1 = X_1 + 3X_2$$

اگر $I_{T_1}(\mu)$ و $I_{T_2}(\mu)$ نشان دهنده میزان اطلاع فیشر در T_1 و T_2 در خصوص μ باشند، گزینه صحیح کدام است؟

$$I_{T_1}(\mu) > I_{T_2}(\mu) \quad (2) \quad I_{T_1}(\mu) < I_{T_2}(\mu) \quad (1)$$

$$I_{T_1}(\mu) = I_{T_2}(\mu) \quad (4) \quad I_{T_2}(\mu) = \frac{1}{10} \quad (3)$$

۱۰۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد. یک کمیت محوری براساس آماره $X_{(n)}$ کدام است؟

$$f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2}; \quad 0 < x < \theta$$

$$\frac{\theta}{X_{(n)}^2} \quad (2) \quad \theta X_n \quad (1)$$

$$-2 \ln(X_{(n)}) \quad (3) \quad -2n \ln\left(\frac{X_{(n)}}{\theta}\right) \quad (4)$$

۱۰۷- در آزمون فرض $H_0: X \sim N(0, 1)$ در مقابل $H_1: X \sim C(0, 1)$ (نمایانگر توزیع کوشی استاندارد است)، تابع آزمون با بیشترین توان

در سطح α کدام است؟

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| > \frac{z_{\alpha/2}}{2} \quad (2) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < \frac{z_{\alpha/2}}{2} \quad (1) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x^2 + 1 > \frac{z_{\alpha/2}}{2} \quad (4) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x^2 + 1 < \frac{z_{\alpha/2}}{2} \quad (3) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

۱۰۸- فرض کنید $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ باشد. برای آزمون $H_0: \alpha = \beta = 1$ در مقابل

$H_1: \alpha = \beta = 2$ ، ناحیه بحرانی پرتوانترین آزمون با اندازه $\alpha = 0.1$ کدام است؟

$$(1) X > 0.9 \quad (2) 0.45 < X < 0.55$$

$$(3) X > 0.95 \text{ یا } X < 0.05 \quad (4) X > 0.9 \text{ یا } X < 0.1$$

۱۰۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین θ باشد.

یک بازه اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100\%$ برای θ کدام است؟

$$(1) \left(\frac{\chi^2_{(n, \frac{\alpha}{2})}}{n\bar{X}}, \frac{\chi^2_{(n, 1-\frac{\alpha}{2})}}{n\bar{X}} \right) \quad (2) \left(\frac{n\bar{X}}{\chi^2_{(n, 1-\frac{\alpha}{2})}}, \frac{n\bar{X}}{\chi^2_{(n, \frac{\alpha}{2})}} \right)$$

$$(3) \left(\frac{\chi^2_{(n, \frac{\alpha}{2})}}{n\bar{X}}, \frac{\chi^2_{(n, 1-\frac{\alpha}{2})}}{n\bar{X}} \right) \quad (4) \left(\frac{n\bar{X}}{\chi^2_{(n, 1-\frac{\alpha}{2})}}, \frac{n\bar{X}}{\chi^2_{(n, \frac{\alpha}{2})}} \right)$$

۱۱۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0, \theta)$ ،

$\theta \in (0, 1]$ باشد، در این صورت تابع آزمون به روش LRT برای آزمون فرض

$H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta < 1$ ، در سطح α کدام است؟

$$(x_{(n)} = \max(x_1, \dots, x_n), x_{(1)} = \min(x_1, \dots, x_n))$$

$$\phi_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} > \sqrt[n]{\alpha} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (2) \quad \phi_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} < \sqrt[n]{\alpha} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 1 & x_{(1)} < \sqrt[n]{\alpha} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (4) \quad \phi_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 1 & x_{(1)} > \sqrt[n]{\alpha} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (3)$$

۱۱۱- اگر متغیر تصادفی X ، تحت فرض H_0 و H_1 ، دارای تابع جرم احتمال زیر باشد:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x H_0)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$f(x H_1)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

آزمونی با بیشترین توان در سطح $\frac{1}{5}$ کدام است؟

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{2, 4\} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (2) \quad \phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in \{2, 4\} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x \in \{2, 3, 4\} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (4) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & x = 6 \\ 0 & x \neq 6 \end{cases} \quad (3)$$

۱۱۲- فرض کنید X_1, \dots, X_5 یک نمونه تصادفی از توزیع $U(\theta-1, \theta+1)$ باشد،

ضریب اطمینان بازه تصادفی $(X_{(1)}, X_{(5)})$ برای θ کدام است؟

$$\frac{15}{16} \quad (1)$$

$$\frac{31}{32} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{7}{8} \quad (4)$$

۱۱۳- یک حد بالای اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی برای θ براساس یافته‌های نمونه

تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع نمایی با میانگین θ کدام است؟

$$\left(P(\chi_{(2n)}^2 < \chi_{(2n; 1-\alpha)}^2) = \alpha \right)$$

$$\left(0, \frac{2n\bar{x}}{\chi_{(2n; 1-\alpha)}^2} \right) \quad (1)$$

$$\left(0, \frac{\chi_{(2n; 1-\alpha)}^2}{2n\bar{x}} \right) \quad (2)$$

$$\left(\frac{2n\bar{x}}{\chi_{(2n; \alpha)}^2}, +\infty \right) \quad (3)$$

$$\left(\frac{\chi_{(2n; \alpha)}^2}{2n\bar{x}}, +\infty \right) \quad (4)$$

۱۱۴- براساس یک مشاهده از تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}}, x > 0$ با

فرض $\theta > 0$ ، یک فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصدی برای θ ، کدام است؟

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{-\ln(\frac{\alpha}{2})}, \frac{\ln(1+x)}{-\ln(1-\frac{\alpha}{2})} \right) \quad (2) \quad \left(x - z_{\frac{\alpha}{2}}, x + z_{\frac{\alpha}{2}} \right) \quad (1)$$

$$\left(\frac{-\ln(1-\frac{\alpha}{2})}{\ln(1+x)}, \frac{-\ln(\frac{\alpha}{2})}{\ln(1+x)} \right) \quad (4) \quad \left(\frac{-\ln(1-\frac{\alpha}{2})}{\ln(x)}, \frac{-\ln(\frac{\alpha}{2})}{\ln(x)} \right) \quad (3)$$

۱۱۵- خانواده توزیع‌های زیر را در نظر بگیرید. براساس یک نمونه تصادفی n تایی کدام گزاره درست است؟

$$F_1 = \{N(\theta, \theta) : \theta > 0\} \text{ و } F_2 = \{N(\theta, \theta^2) : \theta > 0\}$$

- (۱) خانواده F_2 دارای خاصیت MLR در $\sum X_i^2$ است.
- (۲) خانواده F_1 دارای خاصیت MLR در $\sum X_i^2$ است.
- (۳) هر دو خانواده دارای خاصیت MLR در $\sum X_i^2$ است.
- (۴) هیچیک از دو خانواده دارای خاصیت MRL نیست.

دروس تخصصی - نمونه‌گیری

۱۱۶- فرض کنید فهرست کارمندان یک سازمان به ترتیب سال استخدام مرتب شده و اسامی کارمندان مربوطه به هر سال نیز به ترتیب حروف الفبا آمده باشند، اگر بخواهیم میانگین سابقه کارمندان را برآورد کنیم با این فرض که کارمندان استخدام شده هر سال را یک طبقه در نظر بگیریم، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) نمونه‌گیری تصادفی ساده و سیستماتیک کارایی یکسانی دارند.
- (۲) نمونه‌گیری تصادفی ساده و تصادفی طبقه‌ای کارایی یکسانی دارند.
- (۳) نمونه‌گیری تصادفی طبقه‌ای و سیستماتیک کارایی یکسانی دارند.
- (۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۱۱۷- در نمونه گیری طبقه‌ای با دو طبقه، سهم طبقه اول در جامعه 30% درصد و انحراف

معیار آن 10% است. اگر $\sum_{h=1}^2 w_h s_{h1} = 24$ باشد و با فرض آنکه کسر نمونه گیری

برابر $\frac{1}{10}$ باشد واریانس برآوردگر نارایب میانگین جامعه براساس تخصیص نیمین

کدام است؟

$$(1) \frac{510}{n}$$

$$(2) \frac{510}{n^2}$$

$$(3) \frac{510}{N^2}$$

$$(4) \frac{510}{N}$$

۱۱۸- در نمونه گیری طبقه‌ای کدام یک از موارد زیر درست نیست؟

(۱) برآورد میانگین جامعه یک میانگین وزنی از برآورد میانگین طبقه است.

(۲) نمونه گیری در هر طبقه مستقل از طبقات دیگر است.

(۳) واریانس برآورد میانگین جامعه یک ترکیب خطی از واریانس برآورد میانگین طبقات است.

(۴) واریانس برآورد میانگین جامعه یک میانگین وزنی از واریانس برآورد میانگین طبقات است.

۱۱۹- حجم جامعه‌ای برابر N است. مقدار یک واحد جامعه معلوم و برابر y_1 است.

نمونه‌ای تصادفی و بدون جایگذاری به حجم n از $N-1$ واحد باقیمانده جامعه

می‌گیریم. اگر $T_1 = y_1 + (N-1)\bar{y}_n$ ، $T_2 = N\bar{y}_n$ باشند، کارایی نسبی

T_2 نسبت به T_1 کدام است؟

$$(1) \left(1 - \frac{n}{N}\right)^2$$

$$(2) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$$

$$(3) \left(1 + \frac{n}{N}\right)^2$$

$$(4) \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2$$

۱۲۰- می‌خواهیم از یک جامعه طبقه‌بندی شده شامل دو طبقه به حجم‌های N_1 و N_2 با واریانس‌های S_1^2 و S_2^2 یک نمونه تصادفی طبقه‌ای با حجم ثابت n انتخاب کنیم. حجم نمونه طبقه اول چقدر باشد تا واریانس برآوردگر اختلاف میانگین دو طبقه می‌نیم شود؟

$$(1) \frac{nS_1}{S_1 + S_2} \quad (2) \frac{nS_1^2}{S_1^2 + S_2^2}$$

$$(3) \frac{N_1 S_1^2}{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2} n \quad (4) \frac{N_1 S_1}{N_1 S_1 + N_2 S_2} n$$

۱۲۱- از جامعه‌ای به حجم N ، نمونه‌ای تصادفی به حجم n انتخاب می‌کنیم. سپس از این نمونه، زیر نمونه‌ای تصادفی به حجم $n_1 = \frac{n}{3}$ (فرض کنید n بر ۳ بخش پذیر است) انتخاب می‌کنیم. میانگین نمونه اول \bar{y} و میانگین زیر نمونه را \bar{y}_1 می‌نامیم.

واریانس برآوردگر نااریب $\frac{\bar{y} + \bar{y}_1}{2}$ برای میانگین جامعه کدام است؟

$$(1) \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{N}\right) S^2 \quad (2) \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{N}\right) S^2$$

$$(3) \left(\frac{1}{2n_1} - \frac{1}{N}\right) S^2 \quad (4) \left(\frac{2}{n_1} - \frac{1}{N}\right) S^2$$

۱۲۲- در طرح نمونه‌گیری با احتمال نابرابر و بدون جایگذاری، احتمال انتخاب دو واحد i و j در دو انتخاب اول چقدر است؟ ($p_i = 1 - q_i$ احتمال انتخاب واحد i است)

$$(1) \frac{p_i}{p_j} q_j + \frac{p_j}{p_i} q_i \quad (2) \frac{p_i}{q_i} p_j + \frac{p_j}{q_j} p_i$$

$$(3) \frac{p_i p_j}{1 - p_i p_j} \quad (4) \frac{p_i}{p_j} q_i + \frac{p_j}{p_i} q_j$$

۱۲۳- از جامعه‌ای متشکل از ۳ طبقه و براساس نمونه‌گیری مقدماتی با تخصیص متناسب نتیجه زیر به دست آمده است.

$$n_1 s_1 = 2n_2 s_2 = 3n_3 s_3$$

اگر $n = 33$ ، اندازه نمونه هر یک از طبقات (n_1, n_2, n_3) کدام است؟

(۱) $(6, 9, 18)$ (۲) $(5, 11, 17)$

(۳) $(17, 11, 5)$ (۴) $(18, 9, 6)$

۱۲۴- در یک آمارگیری نمونه‌ای با طبقه‌بندی که درون هر طبقه نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری به کار رفته است، اطلاعات زیر حاصل شده است.

فرض کنید $n = 220$ نمونه به صورت تصادفی ساده و بدون طبقه‌بندی بدست آمده‌اند. برآوردی تقریبی از کارائی نسبی برآورد مقدار کل جامعه به روش طبقه‌بندی نسبت به روش تصادفی ساده کدام است؟

(۱) $2/21$

(۲) $7/24$

(۳) $1/26$

(۴) $7/29$

طبقه	N_h	n_h	\bar{x}_h	y_h
۱	۵۰۰	۵۰	۲	۴
۲	۷۰۰	۷۰	۴	۵
۳	۱۰۰۰	۱۰۰	۵	۶
مجموع	۲۲۰۰	۲۲۰		

۱۲۵- جامعه‌ای متناهی به حجم N با متغیری دو مقداری را در نظر بگیرید: اگر P نسبت یکی از این دو مقدار در جامعه و p نسبت آن در یک نمونه‌ی تصادفی ساده و بدون جایگذاری به حجم n باشد، برآورد ناریب $P(1-P)$ کدام است؟

(۱) $p(1-p)$

(۲) $\frac{n(N-1)}{N(n-1)}p(1-p)$

(۳) $\frac{n}{(n-1)}p(1-p)$

(۴) $\frac{N(n-1)}{n(N-1)}p(1-p)$

۱۲۶- در مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، اگر $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ iid باشد، $\hat{\sigma}^2$ و برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی β_1 و σ^2 باشند، گزینه صحیح کدام است؟

(۱) b_1 نااریب و $\hat{\sigma}^2$ نااریب است. (۲) b_1 نااریب و $\hat{\sigma}^2$ اریب است.

(۳) b_1 اریب و $\hat{\sigma}^2$ اریب است. (۴) b_1 اریب و $\hat{\sigma}^2$ نااریب است.

۱۲۷- جمله $x_p \beta_p$ را به مدل رگرسیونی $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$ اضافه می‌کنیم. کدام گزینه در مورد مجموع مربعات خطا (SSE) و میانگین مربعات خطا (MSE) صحیح است؟

(۱) SSE کاهش و MSE ممکن است کاهش یابد.

(۲) SSE و MSE کاهش می‌یابند.

(۳) SSE ممکن است کاهش و MSE کاهش می‌یابد.

(۴) SSE کاهش و MSE افزایش می‌یابد.

۱۲۸- اگر e_i برای $i = 1, 2, \dots, n$ باقیمانده‌های مدل رگرسیون خطی باشند، تحت شرایط درستی مدل، همگنی واریانس‌ها و ناهمبسته بودن خطاها در مدل، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $E(e_i) \neq 0, \text{cov}(e_i, e_j) \neq 0, i \neq j$

(۲) $E(e_i) \neq 0, \text{cov}(e_i, e_j) = 0, i \neq j$

(۳) $E(e_i) = 0, \text{cov}(e_i, e_j) = 0, i \neq j$

(۴) $E(e_i) = 0, \text{cov}(e_i, e_j) \neq 0, i \neq j$

۱۲۹- در نمونه‌ای شامل ۱۰۰ مشاهده ضریب همبستگی بین X و Y برابر $0.72 -$ و خط برازش شده به روش کمترین توان‌های دوم عبارت است از $\hat{Y} = 7 - 3.4X$. بر اساس این نتایج درصد تغییرات قابل توصیف در متغیر Y توسط متغیر X که در رابطه خطی بیان می‌شود، برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $0.72 -$

(۲) $3.4 -$

(۳) 0.849

(۴) 0.518

۱۳۰- میان دو متغیر تصادفی مثبت X و Y رابطه‌ی زیر برقرار است، کدام گزینه ضریب همبستگی بین $U = 3X + 5$ و $V = 5Y + 3$ است؟

$$\frac{X}{4Y} + \frac{Y}{X} = 1$$

(۱) $\frac{1}{15}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{1}{4}$

$$-۱۳۱ \quad \text{در مدل رگرسیونی } y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} + \varepsilon \quad \text{که در آن}$$

$E(\varepsilon) = 0$ و $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}$ ، کدام گزینه بهترین برآوردگر خطی نااریب β_2 است؟

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4)}{4} \quad (۱)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(+y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{4} \quad (۲)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)}{4} \quad (۳)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)}{4} \quad (۴)$$

-۱۳۲ در یک مدل رگرسیونی چند گانه با n مشاهده و k متغیر مستقل کدام گزینه

رابطه بین ضریب تعیین (R^2) و ضریب تعیین تعدیل شده (\bar{R}^2) را به درستی

تبیین می‌کند؟

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n}{k+1} R^2 \quad (۱)$$

$$R^2 = 1 - \frac{n-1}{n-(k+1)} \bar{R}^2 \quad (۲)$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-(k+1)} (1 - R^2) \quad (۳)$$

$$R^2 = 1 - \frac{n-1}{n-(k+1)} \bar{R}^2 \quad (۴)$$

۱۳۳- در مدل رگرسیونی $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, 5$ که در آن $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j, \text{var}(\varepsilon_i) = 1, E(\varepsilon_i) = 0$ کدام برآوردگر، دارای کمترین واریانس در کلاس برآوردگرهای خطی ناریب است؟ فرض کنید مقادیر x_i ها بصورت زیر هستند.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, -1, 0, 1, 2)$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.2 y_5 - 0.1 y_4 + 0.1 y_2 + 0.2 y_1 \quad (1)$$

$$\hat{\beta}_1 = -0.2 y_1 - 0.1 y_2 + 0.1 y_4 + 0.2 y_5 \quad (2)$$

$$\hat{\beta}_1 = -0.5 y_5 - 0.25 y_4 + 0.25 y_2 + 0.5 y_1 \quad (3)$$

$$\hat{\beta}_1 = -0.5 y_1 - 0.25 y_2 + 0.25 y_4 + 0.5 y_5 \quad (4)$$

۱۳۴- در یک مدل رگرسیون چندگانه، گزینه صحیح برای رابطه بین بردار باقیمانده‌ها و بردار مقادیر پیش‌بینی شده کدام است؟

(۱) رابطه آنها مشخص نیست. (۲) غیر وابسته به هم می‌باشند.

(۳) مستقل از هم می‌باشند. (۴) وابسته به هم می‌باشند.

۱۳۵- ضریب رگرسیون β_1 را در مدل $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$ و ضریب رگرسیون

β_1^* را در مدل $y_i = \beta_0^* + \beta_1^* x_{i1} + \beta_2^* x_{i2} + \varepsilon_i$ برآورد می‌کنیم، اگر

$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1^*$ ، گزینه صحیح کدام است؟

$$\sum x_{i1} = 0, \sum x_{i1} x_{i2} = 0 \quad (1)$$

$$\sum x_{i2} = 0, \sum x_{i1} x_{i2} = 0 \quad (2)$$

$$\sum x_{i1} x_{i2} = 0 \quad (3)$$

$$\sum x_{i1} = \sum x_{i2} = 0, \sum x_{i1} x_{i2} = 0 \quad (4)$$