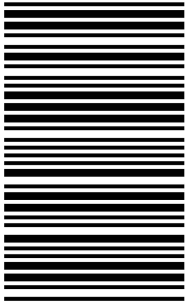


کد کنترل

257A



257A

عصر پنجشنبه

شناور



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان بخش آموزش کشور

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»
مقام معظم رهبری (ره)

آزمون ورودی دوره های کارشناسی ارشد ناپیوسته – سال ۱۴۰۵
علوم کامپیوتر (کد ۱۲۰۹)

مدت زمان پاسخ گویی: ۲۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۳۰ سؤال

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۲۵	۱	۲۵
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریسها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۳۵	۲۶	۶۰
۳	ساختمان داده ها، طراحی الگوریتمها و مبانی نظریه محاسبه	۳۰	۶۱	۹۰
۴	مبانی منطق و نظریه مجموعه ها	۲۰	۹۱	۱۱۰
۵	ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات	۲۰	۱۱۱	۱۳۰

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- The main of a server is to provide services to other computers over a network.
1) trip 2) position 3) function 4) situation
- 2- Time will show him to be a very president in this country, because he has made great long-term decisions.
1) successful 2) friendly 3) additional 4) sudden
- 3- She soon that the local people had no interest in her extraordinary stories.
1) discovered 2) happened 3) developed 4) existed
- 4- That dystopian movie was a perfect of consumerism without morals.
1) reliance 2) prominence 3) improvement 4) demonstration
- 5- It is not unusual for teeth to "shift and drift" as you age and it tends to more in the bottom teeth than the top.
1) descend 2) occur 3) behold 4) abandon
- 6- To earn more money, Lydgate was forced to trade a creative career as an artist for a/an one.
1) ebullient 2) parsimonious 3) lucrative 4) impecunious
- 7- On a more enlightened planet, we would not need to; we could, instead, honestly tell our bosses we have not finished our work and that's that.
1) adumbrate 2) prevaricate 3) disabuse 4) emulate

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Sigmund Freud began his career in the 1890s(8) psychoanalysis, which is both a theory of personality and a method of treating people. To Freud, human behavior is largely determined by wishes and memories(9) unaware. Psychoanalysis as a method of treatment(10) these memories to awareness and free the individuals from their negative influence.

- 8- 1) and formulated 2) who formulating
3) was formulated 4) when was formulating
- 9- 1) which people have been 2) people of them have been
3) of which people are 4) of them people are
- 10- 1) seeking bringing 2) seeking to bring
3) seeks bringing 4) seeks to bring

PASSAGE 2:

Today's computer science is already a broad and varied discipline, using a vast number of concepts to reach its goals. Yet the rate of development of computer science more than matches its current scope. New methods emerge literally every day, new approaches are conceived and put to the test, and some of the old techniques fall out of use. Most of this progress is of an evolutionary, rather than a revolutionary, nature; this in itself is desirable, as it allows a smooth transition to the new concepts. However, in order to deliver truly innovative solutions, some ground-breaking ideas have to be introduced from time to time. Conceiving such ideas is often easier when one can derive inspiration from other disciplines of science.

Borrowing concepts from other disciplines has occurred many times in the history of computer science. Perhaps the most famous example is the artificial neural network (ANN), inspired by the properties and operation of biological neurons. Although ANNs are too simple a model to mimic the behavior of the brain, they are very useful in many applications of soft computing. Enthusiasm for them has periodically waned—as their capabilities seemed to reach a limit—but then waxed again as new methods and algorithms were developed. Nowadays, so-called deep neural networks provide state-of-the-art performance for many tasks, including visual data processing or speech recognition. Another biologically-derived concept is that of the genetic algorithm (GA), a search method that uses operations similar to the phenomena occurring during gene interactions.

- 16- The underlined word “Enthusiasm” in paragraph 2 is closest in meaning to
- 1) hurdle
 - 2) demise
 - 3) misgiving
 - 4) fervor
- 17- According to paragraph 1, the prerequisite for the delivery of authentic innovations in computer science is
- 1) the emergence of new methods on a daily basis, which are conceived and tested, and are then disposed of shortly
 - 2) the sporadic introduction of pioneering ideas which are most readily taken from other branches of science
 - 3) that the scope of development of computer science match the current rate at which it is progressing
 - 4) that there be a clear distinction between progresses of a revolutionary, rather than an evolutionary, nature
- 18- According to paragraph 2, artificial neural networks
- 1) have always provided state-of-the-art performance for tasks such as visual data processing or speech recognition
 - 2) are the most famous cases of borrowing from other disciplines, inspiring the study of the properties of biological neurons
 - 3) are among the concepts which have been most frequently borrowed by genetic science throughout its history
 - 4) have been efficient in some applications of computing, despite not being able to replicate cerebral performance

- 19- According to the passage, which of the following statements is NOT true?
- 1) The current state of progress of computer science impedes a seamless passage to new concepts in the discipline.
 - 2) The history of computer science showcases quite frequent instances of deriving concepts from other disciplines.
 - 3) The genetic algorithm is a search method that uses operations akin to those occurring during gene interactions.
 - 4) ANN and GA are both borrowed concepts for which computer science is indebted to the discipline of biology.
- 20- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?
- I. What was the first concept that computer science borrowed from another discipline?
 - II. What are some of the tasks which have been enhanced by deep neural networks?
 - III. In what decade was the use of ANNs in computer science at its highest point?
- 1) Only I
 - 2) Only II
 - 3) Only III
 - 4) I and II

PASSAGE 3:

Computer science is unique among the sciences in the types of models it creates. In seeking explanations, science often constructs models to test hypotheses for explaining phenomena. These models, in the form of experimental apparatus, are of course physical objects. The models built and manipulated in computer science, however, are not physical at all. Computer science is a science concerned with the study of computational processes. A computational process is distinguished from, say, a chemical or electrical process, in that it is studied “in ways that ignore its physical nature” (Hailperin *et al.* 1999: 3). [1] For example, the process by which a card player arranges cards in her hand, and the process by which a computer sorts names in a customer list, though they share nothing in common physically, may nevertheless embody the same computational process. [2]

This process (known as an insertion sort in computer science terms) can be precisely described in a formal language without talking about playing cards or semiconducting elements. When so described, one has a computational model of the process in the form of a computer program. This model can be tested, in a way analogous to how a hypothesis is tested in the natural sciences, by executing the program and observing its behavior. [3] It can also be reasoned about abstractly, so that questions can be answered about it, such as whether there are other processes which will have the same effect but achieve it more efficiently. Building computational models and answering these kinds of questions form a large part of what computer scientists do. [4]

- 21- Which of the following techniques is used in paragraph 1?
- 1) Rhetorical question
 - 2) Statistics
 - 3) Exemplification
 - 4) Irony

- 22- According to paragraph 1, which of the following is true about the distinction between other sciences and computer science?
- 1) In computer science, processes are much more similar to games such as playing cards, in which both use physical objects such as cards or name lists.
 - 2) The former ignore the physical nature of phenomena, whereas the latter test hypotheses through the construction of models in the form of physical objects.
 - 3) The former construct models in the form of physical objects to test hypotheses for explaining phenomena, while the latter bypass physical attributes.
 - 4) In a chemical or electrical process, the physical object is studied “in ways that ignore its physical nature”, while computer processes do the opposite.
- 23- According to paragraph 2, all of the following are true about computer models EXCEPT that
- 1) they result from specific descriptions of various processes and are capable of being subject to reasoning in an abstract manner
 - 2) they can be tested via executing the program and observing its behavior, similar to the way hypotheses are tested in natural science
 - 3) questions can be posed concerning their outcomes and whether they can be improved upon through employment of different processes
 - 4) they can only be accurately described using standard academic language without reference to trivial matters such as playing cards
- 24- Which of the following words best describes the author’s overall tone in the passage?
- 1) Biased
 - 2) Impartial
 - 3) Humorous
 - 4) Passionate
- 25- In which position marked by [1], [2], [3] and [4], can the following sentence best be inserted in the passage?
- They may, for example, both proceed by scanning the items to be arranged one by one, determining the proper place of each scanned item relative to the items already scanned, and putting it into that place, perhaps necessitating the moving of previously scanned items to make room.
- 1) [1]
 - 2) [2]
 - 3) [3]
 - 4) [4]

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۲۶- مجموع ریشه های متمایز معادله $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ ، کدام است؟

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

۲۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tan^{-1}(\ln x) - \frac{\pi}{2}) \ln x$ ، کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۲

۲۸- کدام مورد برای تابع پارامتری $(t > 0)$ ، $\begin{cases} x(t) = t^2 + 4 \\ y(t) = t^3 - 6t^2 + 5t \end{cases}$ ، درست است؟

(۱) تابع در بازه $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$ تقعر روبه بالا دارد.

(۲) تابع در بازه $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$ تقعر روبه پایین دارد.

(۳) تابع در بازه $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}) \cup (0, \sqrt{\frac{5}{3}})$ تقعر روبه بالا دارد.

(۴) تابع در بازه $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}) \cup (0, \sqrt{\frac{5}{3}})$ تقعر روبه پایین دارد.

۲۹- حجم جسم حاصل از دوران سطح محصور به منحنی‌های $y = 0$ و $y = \frac{1}{1+x^2}$ حول محور x ، کدام است؟

(۱) $\frac{\pi^2}{2}$

(۲) $\frac{\pi^2}{3}$

(۳) $\frac{\pi^2}{4}$

(۴) ∞

۳۰- اگر $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} \alpha^{n-1}}{(n-1)!} = -2$ ، آنگاه مقدار α کدام است؟

(۱) $\ln 2$

(۲) $\ln \sqrt{2}$

(۳) $-\ln \sqrt{2}$

(۴) $-\ln 2$

۳۱- مرکز دایره مماسی (بوسان) منحنی $y = \frac{2}{x}$ در نقطه $(1, 2)$ ، کدام است؟

(۱) $(\frac{7}{2}, \frac{13}{4})$

(۲) $(\frac{7}{4}, \frac{13}{2})$

(۳) $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{8})$

(۴) $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

۳۲- فرض کنید به ازای عدد حقیقی $\alpha > 0$ ، مقدار ماکزیمم تابع $f(x, y, z) = xy^2z^3$ با شرایط $x + 2y + 3z = \alpha$ و $x, y, z > 0$ برابر $\frac{1}{36}$ است. مقدار α کدام است؟

(۱) $\sqrt[5]{36}$

(۲) $\sqrt[3]{36}$

(۳) $\sqrt[5]{6}$

(۴) $\sqrt[3]{6}$

۳۳- مقدار $\int_0^2 \int_{x-x^2}^{2-x^2} x \cos((x^2+y)^3) dy dx$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{3 \sin \lambda}{4}$

(۲) $\frac{\sin \lambda}{3}$

(۳) $\frac{\sin \lambda}{4}$

(۴) $\frac{\sin \lambda}{6}$

۳۴- فرض کنید C خم $\vec{r}(t) = (3 \cos t, 4 \sin t), t \in [0, \pi]$ باشد. مقدار $\int_C (e^{2x} - y - \cos(2y)) dx + (e^{2y} + 2x \sin(2y)) dy$ کدام است؟

(۱) $6 - 6\pi + \sinh 6$

(۲) $6 - 6\pi + \cosh 6$

(۳) $6 + 6\pi - \sinh 6$

(۴) $6 + 6\pi - \cosh 6$

۳۵- فرض کنید S ناحیه محصور به رویه $(\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 4$ و زیر صفحه $z = 0$ باشد، به طوری که جهت بردارهای نرمال آن رو به پایین است. برای میدان برداری

$\vec{F}(x, y, z) = (2xy + 2z + z^2, 2x + x^2 + e^z, x + 3xz + \cos y)$ ، مقدار $\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot d\vec{S}$ ، کدام است؟

(۱) -48π

(۲) -8π

(۳) 8π

(۴) 48π

۳۶- یک برنامه ریز کامپیوتر تابع یا عملگر f را بر مجموعه دانشجویان یک کلاس مانند S به توی مجموعه نمرات $G = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ تعریف می کند. اگر $f: S \rightarrow G$ خوش تعریف باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) هر دانشجویی در S باید نمره ای در G داشته باشد.

(۲) عدد اصلی S باید بزرگتر یا مساوی عدد اصلی G باشد.

(۳) هر نمره ای در G اختصاص به دانشجویی در S دارد.

(۴) هیچ دو دانشجویی در S یافت نمی شوند که نمره یکسان در G داشته باشند.

۳۷- اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل عبارت $(A^c \cap B) \cup [((A \setminus B) \cup B^c) \cap (B \setminus A)]$ کدام است؟

(۱) A

(۲) $B \setminus A$

(۳) $A \setminus B$

(۴) B

۳۸- کدام گزینه نتیجه می‌دهد رابطه $\sim$ ، هم‌ارزی است؟

$$\forall x, y \in \mathbb{R} (x \sim y \Leftrightarrow x - y \in A)$$

(۱) A مجموعه اعداد صحیح باشد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر هستند.

$$A = \left\{ \frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, m \leq n \right\} \quad (۲)$$

(۳) A مجموعه اعداد صحیح غیراول باشد.

$$A = \left\{ \frac{m}{p^n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \right\} \quad (۴)$$

۳۹- فرض کنید A و B مجموعه‌های نامتناهی باشند به‌طوری که $A \subseteq B$. اگر $\cong$ نماد هم‌عدد بودن باشد، کدام گزینه درست است؟

$$B \setminus A \cong B \quad (۱)$$

$$B \setminus A \cong A \quad (۲)$$

$$A \times B \cong B \quad (۳)$$

$$A^B \cong B^A \quad (۴)$$

۴۰- فرض کنید عدد اصلی مجموعه X را به $|X|$ نشان دهیم. تابع $f: A \rightarrow B$ و گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف - اگر f یک به یک باشد، آنگاه $|A| \leq |B|$.

ب - اگر f پوشا باشد، آنگاه $|A| \geq |B|$.

ج - اگر f دوسویی باشد، آنگاه $|A| = |B|$.

د - اگر $|A| = |B|$ ، آنگاه f دوسویی است.

کدام گزینه درست است؟

(۱) فقط گزاره‌های «الف» و «ج» درست هستند.

(۲) فقط گزاره‌های «ب» و «د» درست هستند.

(۳) فقط گزاره‌های «ج» و «د» درست هستند.

(۴) فقط گزاره‌های «الف» و «ب» و «ج» درست هستند.

۴۱- فرض کنید W فضای برداری تمام ماتریس‌های 4×4 حقیقی و متقارن با اثر صفر باشد. بُعد W کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۹

(۳) ۸

(۴) ۷

۴۲- فرض کنید $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد که تنها دارای یک مقدار ویژه λ است. کدام گزینه همواره صحیح است؟

$$T = \lambda I \quad (۱)$$

$$\dim V = 1 \quad (۲)$$

(۳) T قطری شدنی است.

$$T - \lambda I \text{ یوچ توان است.} \quad (۴)$$

۴۳- تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت $T(x, y, z) = (3x, x - 4z, y)$ تعریف شده است. اگر $\alpha_1 = (0, 1, 1)$ ، $\alpha_2 = (0, 0, 1)$ و $\alpha_3 = (1, 1, 0)$ ، آنگاه ماتریس نمایش T نسبت به پایه مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 4 & -5 & -4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۴۴- فرض کنید T یک تبدیل خطی روی P_2 (فضای توابع چند جمله‌ای از درجه حداکثر ۲ روی میدان $\mathbb{R}$) باشد که با ضابطه $T(f(x)) = f(x) + (x+1)f'(x)$ تعریف شده است. مجموعه همه مقادیر ویژه T کدام است؟

$$(1) \{2\}$$

$$(2) \{1, 2\}$$

$$(3) \{1, 2, 3\}$$

$$(4) \{1, 2, 4\}$$

۴۵- فرض کنید A یک ماتریس 3×3 حقیقی و متقارن با مقادیر ویژه ۱، ۲ و ۳ باشد. اگر $(1, 1, 1)$ و $(1, 0, -1)$ به ترتیب بردارهای ویژه وابسته به مقادیر ویژه ۱ و ۲ باشند، آنگاه کدام گزینه یک بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه ۳ است؟

$$(1) (-1, 2, -1)$$

$$(2) (1, -2, 1)$$

$$(3) (1, 0, -1)$$

$$(4) (1, 1, 0)$$

۴۶- کدام مجموعه در $[0, 1]$ با متر اقلیدسی چگال است؟

$$(1) \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(2) \left\{ \frac{m}{m^2+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(3) \left\{ \frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}$$

$$(4) \{x \in [0, 1] : \text{در بسط اعشاری } x \text{ فقط رقم‌های } 3 \text{ و } 5 \text{ ظاهر می‌شود}\}$$

۴۷- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کران‌دار از اعداد حقیقی باشد. کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ که } n \in \mathbb{N} \text{ وجود دارد}$$

$$(2) \text{اگر به ازای هر } n \in \mathbb{N}, a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \text{، آنگاه } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ موجود است.}$$

$$(3) \text{مجموعه نقاط حدی دنباله } \{a_n\} \text{ دارای ماکسیمم (بیشینه) و مینیمم (کمینه) است.}$$

$$(4) \text{دنباله } \{a_n\} \text{ حداقل یک نقطه حدی دارد.}$$

۴۸- فرض کنید تابع حقیقی f بر $\mathbb{R}$ متناوب است و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. کدام گزینه درباره تابع f درست است؟

(۱) مشتق پذیر و کران دار است.

(۲) پیوسته است ولی لزوماً مشتق پذیر نیست.

(۳) کران دار است ولی لزوماً پیوسته نیست.

(۴) مشتق پذیر است ولی لزوماً کران دار نیست.

۴۹- فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و بر $(0, 1)$ مشتق پذیر باشد. دو گزاره زیر را در نظر می گیریم:

الف - اگر $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$ موجود باشد، آنگاه $f'(1)$ موجود است.

ب - اگر برای هر $a \in (0, 1)$ ، $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ موجود باشد، آنگاه f' بر $(0, 1)$ پیوسته است.

کدام گزینه درست است؟

(۱) «الف» و «ب» درست است.

(۲) «الف» درست و «ب» نادرست است.

(۳) «ب» درست و «الف» نادرست است.

(۴) «الف» و «ب» نادرست است.

۵۰- فرض کنید p و q دو چند جمله ای به ترتیب با درجه m و k و ضرایب نامنفی باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ همگرا است اگر و تنها اگر $m+1 < k$.

(۲) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ همگرا باشد آنگاه $m+1 < k$ ولی عکس این گزاره لزوماً درست نیست.

(۳) اگر $m+1 < k$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ همگرا است ولی عکس این گزاره لزوماً درست نیست.

(۴) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ و نامساوی $m+1 < k$ ، هیچ کدام دیگری را نتیجه نمی دهد.

۵۱- حجم استوانه ای به شعاع r و ارتفاع h را با استفاده از یک ماشین حساب که در دستگاه ممیز شناور با دقت ε کار

می کند، محاسبه می کنیم. کران بالای دقت حجم محاسبه شده، کدام مضرب ε است؟

(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) ۴

(۴) $3\sqrt{2}$

۵۲- برای محاسبه مقدار تقریبی ریشه $x = 0$ در معادله $x = \sin x$ ، کدام دنباله بازگشتی زیر با توجه به مرتبه

همگرایی، سریع تر است؟

(۱) $x_{n+1} = \sin x_n$ ، $x_0 \neq k\pi$

(۲) $x_{n+1} = x_n - \tan x_n$ ، $x_0 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۳) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin x_n}{1 - \cos x_n}$ ، $x_0 \neq 2k\pi$

(۴) $x_{n+1} = x_n - \frac{1 - \cos x_n}{\sin x_n}$ ، $x_0 \neq k\pi$

۵۳- با به کار بردن دستور رامبرگ با خطای مرتبه ۶ و انتخاب طول گام اولیه $h_0 = 2$ ، مقدار تقریبی $\int_0^2 4^x dx$ کدام است؟ (محاسبات با دقت دو رقم اعشاری گرد شوند).

(۱) $10/70$

(۲) $10/78$

(۳) $10/82$

(۴) 11

۵۴- با استفاده از اسپلین مکعبی تابع جدولی $\{(1, -1), (0, 1), (-1, 0)\}$ را به صورت

$$S(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & -1 \leq x \leq 0 \\ a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

درونیابی می کنیم. مقدار a_3 کدام است؟

(۱) -8

(۲) -4

(۳) 1

(۴) 6

۵۵- فرض کنید $p(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع جدولی $\{(n, n^4) : n = 1, 2, \dots, 5\}$ باشد. نقاط $(5, 625)$ و $(4, 256)$ را از تابع جدولی حذف کرده و چند جمله ای درونیاب تابع جدولی جدید را $p_1(x)$ می نامیم. حاصل عبارت

کدام است؟ $\frac{p(x) - p(1)}{p_1(x) - p_1(1)}$

(۱) $\frac{x^2 - 1}{5x - 7}$

(۲) $\frac{x^2 - 1}{25x - 35}$

(۳) $\frac{(x+1)(x^2+1)}{5x-7}$

(۴) $\frac{(x+1)(x^2+1)}{25x-35}$

۵۶- با اعداد ۱ تا ۵ چند عدد حداکثر ۱۰ رقمی می توانیم بسازیم؟

(۱) $\frac{5}{4} (5^{10} - 1)$

(۲) $\frac{6}{5} (6^{10} - 1)$

(۳) $\frac{5}{3} (5^{10} - 2)$

(۴) $\frac{5}{4} (5^9 - 2)$

۵۷- اگر $P(A|B) > P(A)$ باشد. آنگاه کدام یک از موارد زیر درست است؟

(۱) $P(B|A) < P(A)$

(۲) $P(B|A) > P(A)$

(۳) $P(B|A) < P(B)$

(۴) $P(B|A) > P(B)$

۵۸- از بین ۳ مرد و ۲ زن می‌خواهیم ۳ نفر را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال این که اکثریت با مردها باشد چقدر است؟

(۱) $\frac{2}{10}$

(۲) $\frac{3}{10}$

(۳) $\frac{5}{10}$

(۴) $\frac{7}{10}$

۵۹- در یک مهمانی ۵ نفر کلاه‌های خود را روی هم می‌ریزند و هر کدام به‌طور تصادفی یک کلاه بر می‌دارد. احتمال این که دقیقاً دو نفر کلاه خود را بردارند، چقدر است؟

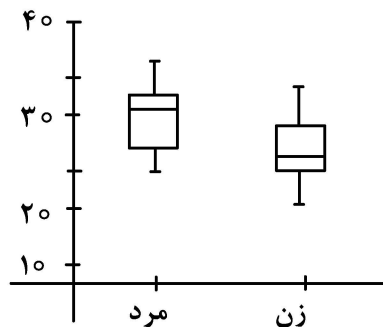
(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{4}$

۶۰- نمودار جعبه‌ای خوشه‌ای برای میزان چاقی به تفکیک جنسیت به‌صورت زیر رسم شده است. کدام مورد در خصوص این نمودار درست است؟



(۱) واریانس میزان چاقی در زن‌ها بیشتر از مردها می‌باشد.

(۲) میانه میزان چاقی در زن‌ها بیشتر از مردها می‌باشد.

(۳) واریانس میزان چاقی به جنسیت وابسته است.

(۴) واریانس میزان چاقی در زن‌ها و مردها برابر است.

ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه:

۶۱- آرایه A حاوی n بیت است. فرض کنید A یکی از دو گونه زیر است:

گونه ۱: نیمی از درایه‌های A حاوی بیت صفر و نیم دیگر حاوی بیت ۱ (بدون ترتیب) است.

گونه ۲: A در مجموع $\frac{2}{3}n$ صفر و $\frac{1}{3}n$ یک دارد.

به‌شما آرایه A داده شده است که می‌تواند از گونه ۱ یا ۲ باشد. در بدترین حالت، دست‌کم شما چقدر از درایه‌های A را باید بررسی کنید. تا گونه آن را با اطمینان تشخیص دهید؟

(۱) $\frac{5}{6}n$

(۲) $\frac{2}{3}n$

(۳) $\frac{2n}{3} + 1$

(۴) $\frac{5n}{6} + 1$

۶۲- آرایه A شامل n عدد صحیح در مکان $A[0] \dots A[n-1]$ و $A[0]$ است. لازم است. عناصر آرایه به صورت چرخه‌ای به اندازه k مکان به سمت چپ منتقل شوند، که در آن $0 \leq k \leq n-1$ است. یک الگوریتم ناقص برای انجام این کار در زمان خطی، بدون استفاده از آرایه دیگر در زیر آورده شده است. الگوریتم را با پر کردن جاهای خالی کامل کنید. (فرض کنید متغیرها به طور مناسب تعریف شده‌اند).

$\text{min} = n; i = 0;$

while (...) {

$\text{temp} = A[i]; j = i;$

while (...) {

$A[j] = \dots$

$j = (j + k) \bmod n;$

if ($j < \text{min}$) **then**

$\text{min} = j;$

 }

$A[(n + i - k) \bmod n] = \dots$

$i = \dots$

$i < \text{min}; j! = (n + i - k) \bmod n; A[(j + k) \bmod n]; \text{temp}; i + 1;$ (۱)

$i > \text{min}; j! = (n + i) \bmod n; A[j + k]; \text{temp}; i + 1;$ (۲)

$i < \text{min}; j! = (n + i) \bmod n; A[j + k]; \text{temp}; i + 1;$ (۳)

$i > \text{min}; j! = (n + i + k) \bmod n; A[(j + k)]; \text{temp}; i + 1;$ (۴)

۶۳- فرض کنید P یک لیست تک پیوندی باشد و همچنین Q اشاره‌گری به گرهی میانی X در لیست باشد. پیچیدگی زمانی بهترین الگوریتم شناخته برای حذف گره Q از لیست چیست؟

(۱) $O(1)$

(۲) $O(n)$

(۳) $O(\lg_2 n)$

(۴) $O(n \log n)$

۶۴- فرض کنید G یک گراف بدون جهت وزن دار و e یالی با حداکثر وزن در G باشد. فرض کنید یک پوشای با حداقل وزن در G وجود دارد که شامل یال e است. کدام یک از عبارات زیر همواره درست است؟

(۱) تمام یال‌های G وزن یکسانی دارند.

(۲) یال e نمی‌تواند در یک دور قرار گیرد.

(۳) یک دور در G وجود دارد که تمام یال‌های آن حداکثر وزن را دارند.

(۴) یک مجموعه برش در G وجود دارد که تمام یال‌های آن حداکثر وزن را دارند.

۶۵- بدترین حالت پیچیدگی زمانی درج n^2 عنصر در یک درخت AVL با n عنصر اولیه چیست؟

(۲) $\theta(n^2)$

(۱) $\theta(n^4)$

(۴) $\theta(n \lg n)$

(۳) $\theta(n^2 \lg n)$

۶۶- هنگام جستجوی مقدار کلید ۶۰ در یک درخت جستجوی دودویی، گره‌های حاوی مقادیر کلید ۱۰، ۲۰ و ۴۰ و ۵۰ و ۷۰ و ۸۰ و ۹۰ پیمایش می‌شوند. (نه لزوماً به ترتیب داده شده). چند ترتیب مختلف ممکن است که با این مقادیر کلید در مسیر جستجو از ریشه تا گره حاوی مقدار ۶۰ رخ دهد؟

(۱) ۳۵ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۵۰۴۰

۶۷- یک درخت دودویی کامل را در نظر بگیرید که زیر درخت‌های چپ و راست ریشه ماکزیمم - هیپ هستند. حد پایین برای تعداد عملیات تبدیل درخت به ماکزیمم - هیپ برابر است با:

(۱) $\Omega(n)$ (۲) $\Omega(\lg n)$ (۳) $\Omega(n \lg n)$ (۴) $\Omega(n^2)$

۶۸- یک جدول هش به طول ۱۰ از آدرس دهی باز با تابع هش $h(k) = k \bmod 10$ و کاوش خطی استفاده می‌کند. پس از قراردادن ۶ مقدار در یک جدول هش خالی جدول به صورت زیر در می‌آید. کدام یک از موارد زیر ترتیب احتمالی قرار گرفتن مقادیر کلیدی در جدول را نشان می‌دهد؟

۰	
۱	
۲	۴۲
۳	۲۳
۴	۳۴
۵	۵۲
۶	۴۶
۷	۳۳
۸	
۹	

(۱) ۴۶ و ۳۳ و ۵۲ و ۲۳ و ۴۲ و ۳۴

(۲) ۵۲ و ۳۴ و ۲۳ و ۳۳ و ۴۶ و ۴۲

(۳) ۳۳ و ۲۳ و ۵۲ و ۳۴ و ۴۲ و ۴۶

(۴) ۳۳ و ۵۲ و ۲۳ و ۴۲ و ۳۴ و ۴۶

۶۹- فرض کنید یک درخت جستجوی دودویی (BST)، با n گره داریم. که اعداد ۱ تا n را به صورت نامرتب در خود ذخیره کرده است. الگوریتم بازگشتی زیر روی این درخت اجرا می‌شود؟

Algorithm mys(node):

if node == NULL : return 0

if node.Left == NULL and

node.right == NULL :

return 1

if node.left != NULL and

node.right != NULL :

return mys(node, lrf) + mys(node, right)

if node.left != NULL :

return mys(node, lrf) + 1

if node.right != NULL

return mys(node, lrf) + 1

کدام گزینه در مورد خروجی این الگوریتم همواره درست است؟

(۱) خروجی الگوریتم برابر با تعداد گره‌های برگ به اضافه تعداد گره‌هایی که دقیقاً یک فرزند دارند است.

(۲) خروجی الگوریتم برابر با تعداد برگ‌های درخت است.

(۳) خروجی الگوریتم برابر تعداد گره‌هایی تک فرزندی است.

(۴) خروجی الگوریتم برابر ارتفاع درخت است.

۷۰- در یک گراف همبند بدون وزن می‌خواهیم کم تعدادترین یال‌ها را از یک گره مبدأ به گره مقصد طی کنیم. کدام روش زیر کمترین یال‌ها را تضمین می‌کند؟

(۱) الگوریتم بلمن - فورد

(۲) DFS و انتخاب اولین مسیر یافت شده

(۳) BFS از مبدأ تا مقصد

(۴) الگوریتم دایکسترا

۷۱- پیچیدگی زمانی الگوریتم زیر را بیابید؟

```
Void func(int n){
    if (n <= 1) return;
    for (int i = 1; i <= n; i++){
        for (int j = 1; j <= n; j++){
            Printf ("*")
        }
    }
    func(n/2);
    func(n/2);
}
```

(۱) $O(n^2)$

(۲) $O(n \log n)$

(۳) $O(n^2 \log n)$

(۴) $O(n^3)$

۷۲- الگوریتم عقب‌گرد برای تعیین همهٔ دوره‌های هامیلتونی در یک گراف همبند و بدون جهت G با n رأس را در نظر بگیرید. تعداد گره‌ها در درخت فضای حالت این الگوریتم کدام است؟

$$(1) \frac{(n-1)^n - 1}{n-1}$$

$$(2) \frac{(n-1)^n - 1}{n-2}$$

$$(3) (n-1)^n$$

$$(4) \frac{n^{n+1} - 1}{n-1}$$

۷۳- فرض کنید شما مسئول تخصیص منابع چند پروژه هستید که به مقدار مشخصی منابع نیاز داشته و سود مشخصی دارد و منابع شما هم به‌میزان محدود $R = 50$ می‌باشد. اطلاعات این پروژه‌ها در جدول زیر داده شده است. اگر از الگوریتم حریصانه براساس نسبت بیشترین سود به منابع استفاده کنیم کدام پروژه‌ها انتخاب و سود کل چقدر است؟

پروژه	نیاز منابع	سود
A	۱۰	۶۰
B	۲۰	۱۰۰
C	۳۰	۱۲۰
D	۲۵	۹۰
E	۱۵	۷۵

(۱) پروژه‌های A و C و سود کل ۱۸۰

(۲) پروژه‌های B و D و سود کل ۱۹۰

(۳) پروژه‌های C و D و سود کل ۲۱۰

(۴) پروژه‌های E و B و A و سود کل ۲۳۵

۷۴- تعداد (۹) فایل مرتب‌شده با اندازه‌های ۳ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۲۰ و ۳۳ مفروض است. می‌خواهیم این ۹ فایل را سه‌به‌سه با هم ادغام کرده و فایل مرتب‌شده واحدی به‌دست آوریم. حداقل تعداد جابه‌جایی‌ها چقدر است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۲۳۱

(۴) ۳۳۱

۷۵- کدام مورد در خصوص الگوریتم عقب‌گرد درست نیست؟

- (۱) همیشه بهترین جواب را پیدا می‌کند.
- (۲) برای پیمایش درخت فضای حالت از DFS استفاده می‌کند.
- (۳) برای کاهش فضای جستجو از هرس کردن استفاده می‌کند.
- (۴) در بدترین حالت ممکن است تمام گره‌ها را بررسی کند.

۷۶- الگوریتم زیر برای تعیین عنصر ماکزیمم آرایه $A[1 \dots n]$ مفروض است. این الگوریتم، اندیس عنصر ماکزیمم را توسط j برمی‌گرداند. با فرض آن که عناصر آرایه A ، اعداد صحیح متمایز و متساوی الاحتمال باشند در این صورت میانگین زمان اجرای دستورالعمل d یعنی $j = i$ کدام است؟

Algorithm Find max (A, n, j)

- a) $j = n$
- b) for $i = n - 1$ downto 1 do
- c) if $A[i] > A[j]$ then
- d) $j = i$

(۲) $\theta(n)$

(۱) $\theta(\log n)$

(۴) $\frac{n-1}{2}$

(۳) $\frac{n+1}{2}$

۷۷- چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

- الف - $g(n) = \omega(f(n))$ اگر و تنها اگر $f(n) = o(g(n))$
- ب - $g(n) = \Omega(f(n))$ اگر و تنها اگر $f(n) = O(g(n))$
- ج - $n = \omega(\log n)$
- د - $\frac{n^3}{\log n} = \theta(n^2)$

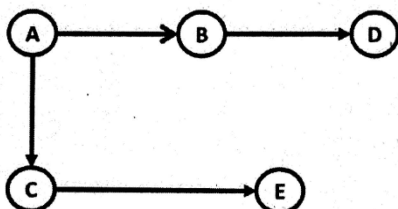
(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

۷۸- فرض کنید الگوریتم DFS روی گراف ارائه شده اجرا می‌شود و همیشه رأس‌ها به ترتیب الفبایی انتخاب می‌شوند. در پایان اجرای الگوریتم DFS زودترین خروج تا دیرترین خروج کدام است؟ (منظور از خروج، اتمام ملاقات رأس است.)



- (۱) A, B, C, D, E
- (۲) E, C, D, B, A
- (۳) B, D, C, E, A
- (۴) D, B, E, C, A

۷۹- مسئله زمان‌بندی فعالیت‌ها با مهلت که در آن n فعالیت داریم را در نظر بگیرید. برای فعالیت i یک مهلت d_i و یک ارزش P_i منصوب است. برای فعالیت i ارزش P_i زمانی حاصل می‌شود که این فعالیت در مهلت d_i به انجام برسد. در صورتی که $n = 5$ و $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) = (20, 15, 10, 5, 1)$ و $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (2, 3, 1, 3, 3)$ باشند ارزش بهینه برابر کدام مورد است؟

(۲) ۲۵

(۱) ۱۵

(۴) ۴۵

(۳) ۴۰

۸۰- اگر در روش کدگذاری هافمن، فراوانی داده اول از مجموع فراوانی $n-1$ داده دیگر بیشتر بوده و فراوانی $n-1$ عضو ذکر شده با هم برابر باشد، آنگاه طول کد تولید شده حداکثر چقدر است؟

(۱) $\lceil \log n \rceil + 1$

(۲) $\lceil \log (n-1) \rceil + 1$

(۳) $\lfloor \log n \rfloor + 1$

(۴) $\lfloor \log (n-1) \rfloor + 1$

۸۱- فرض کنیم L زبان عبارت منظم $r = (0^*10^*)(10^*10^*)^*$ باشد. با فرض $\beta = (01)^{1404} \circ (101)^{1405}$ و

$\alpha = (100)^{1404}$ کدام گزینه درست است؟

(۱) $\alpha \in L$ و $\beta \in L$

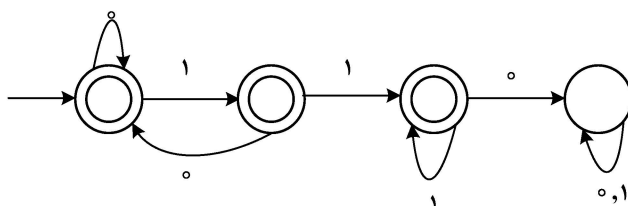
(۲) $\alpha \notin L$ و $\beta \notin L$

(۳) $\alpha \notin L$ و $\beta \in L$

(۴) $\alpha \in L$ و $\beta \notin L$

۸۲- فرض کنیم L زبان اتوماتای متناهی معین (DFA) زیر باشد. با فرض $\beta = (0101)^{1403} (100)^{1404}$ و

$\alpha = (101)^{1404} (001)^{1405}$ کدام گزینه درست است؟



(۱) $\alpha \in L$ و $\beta \in L$

(۲) $\alpha \notin L$ و $\beta \notin L$

(۳) $\alpha \notin L$ و $\beta \in L$

(۴) $\alpha \in L$ و $\beta \notin L$

۸۳- فرض کنیم L زبان گرامر زیر با متغیر شروع S باشد:

$$S \rightarrow ES | \epsilon$$

$$E \rightarrow aEb | \epsilon$$

اگر $\alpha = (a^2b^2)^{1404} (a^3b^3)^{1405}$ و $\beta = (a^2b^2)^{1404} (a^2b^2)^{1405}$ کدام گزینه درست است؟

(۱) $\alpha \notin L$ و $\beta \in L$

(۲) $\alpha \in L$ و $\beta \notin L$

(۳) $\alpha \in L$ و $\beta \in L$

(۴) $\alpha \notin L$ و $\beta \notin L$

۸۴- فرض کنیم $L_1 = \{wa^2k \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = k\}$ و $L_2 = \{a^kw \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = k\}$. از این دو زبان کدام

منظم است؟

(۲) فقط L_2

(۱) فقط L_1

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

۸۵- فرض کنیم $L_1 = \{a^n b^m : n \neq 2m\}$ و $L_2 = \{a^n b^m : n \leq m^2\}$. از این دو زبان کدام مستقل از متن است؟

(۲) فقط L_2

(۱) فقط L_1

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

۸۶- فرض کنیم

$$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) + n_b(w) = n_c(w)\} \text{ و } L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) + n_b(w) = 2n_c(w)\}$$

از این دو زبان کدام مستقل از متن است؟

- (۱) فقط L_1 (۲) فقط L_2 (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۸۷- فرض کنیم زبان L_1 با الفبای $\{a, b\}$ با قوانین زیر تعریف شده باشد:

$$\lambda \in L_1$$

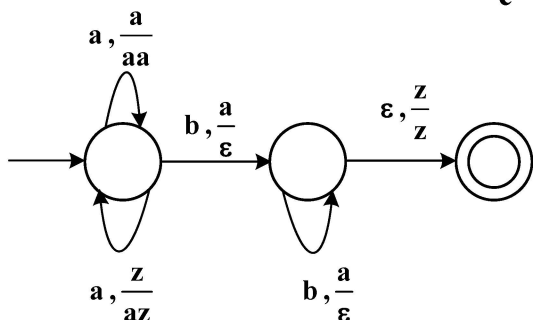
ب- اگر $x \in L_1$ آنگاه $aabx \in L_1$ و $xb \in L_1$

به علاوه فقط رشته هایی در L_1 هستند که از دو قانون بالایی به دست آمده باشند. اگر L_2 زبان عبارت منظم

$r = (aab)^*(bb)^*$ باشد. کدام گزینه در مورد L_1 و L_2 درست است؟

- (۱) $L_1 \subsetneq L_2$ (۲) $L_1 = L_2$ (۳) $L_2 \subsetneq L_1$ (۴) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

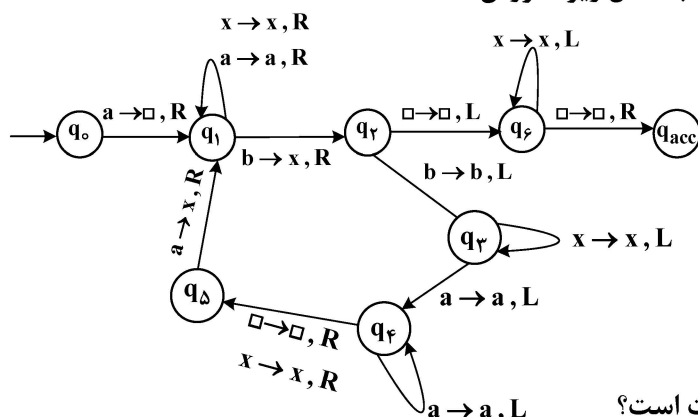
۸۸- فرض کنیم L_1 زبان npda زیر باشد: (z علامت کف پشته است. $a, \frac{b}{c}$ یعنی با دیدن a در ورودی و b بالای پشته c جایگزین بالای پشته شود.)



اگر L_2 یک زبان منظم دلخواه باشد، کدام گزینه در مورد $L_1 \cap L_2$ درست است؟

- (۱) $L_1 \cap L_2$ همواره منظم است.
(۲) $L_1 \cap L_2$ همواره متناهی است.
(۳) $L_1 \cap L_2$ ممکن است مستقل از متن نباشد.
(۴) $L_1 \cap L_2$ همواره مستقل از متن است ولی ممکن است منظم نباشد.

۸۹- ماشین تورینگ استاندارد بر الفبای $\Sigma = \{a, b\}$ با شکل زیر مفروض است.



کدام گزینه در خصوص این ماشین تورینگ درست است؟

(a) دنباله ای از محاسبات به صورت $q_0 \vdash aabbb \vdash q_5 \vdash aabbb \vdash q_0$ وجود دارد.

(b) برای هر رشته ورودی هیچ دنباله ای نامتناهی از محاسبات وجود ندارد و در نتیجه محاسبات در جایی متوقف خواهد شد.

- (۱) فقط (a) (۲) فقط (b) (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۹۰- اگر A متغیر و S متغیر شروع باشد از دو گرامر زیر کدام یک در فرم نرمال چامسکی هستند؟

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow AS|a & S \rightarrow AS|a \\ A \rightarrow SA|b & A \rightarrow SA|aa \\ \text{«الف»} & \text{«ب»} \end{array}$$

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب» (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها:

۹۱- از این دو استدلال کدام معتبر است؟

a - تمام اعداد حقیقی، عدد منفی هستند.

بعضی اعداد حقیقی مثبت هستند.

بنابراین: بعضی اعداد منفی، مثبت هستند.

b - هیچ عدد منفی، عدد مثبت نیست.

بعضی اعداد مثبت، عدد طبیعی هستند.

بنابراین: بعضی اعداد طبیعی، منفی نیستند.

(۱) فقط «a» (۲) فقط «b» (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۹۲- کدام مورد معادل عبارت زیر است:

چنین نیست که (پذیرفته شدن علی در دانشگاه شرط لازم برای موفقیت علی است).

(۱) علی موفق نیست و در دانشگاه پذیرفته نشده است. (۲) علی در دانشگاه پذیرفته شده است ولی موفق نیست.

(۳) علی موفق است و در دانشگاه پذیرفته شده است. (۴) علی موفق است ولی در دانشگاه پذیرفته نشده است.

۹۳- فرض کنید

x باهوش است: B(x)

x آدم است: A(x)

کدام مورد معادل عبارت زیر است:

چنین نیست که (تمام آدم‌ها باهوش هستند).

$$\begin{array}{ll} \exists x (A(x) \wedge \neg B(x)) & (۱) \exists x (A(x) \rightarrow \neg B(x)) \\ \forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x)) & (۳) \forall x (A(x) \wedge \neg B(x)) \\ & (۴) \forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x)) \end{array}$$

۹۴- فرض کنید

S(x): x ورزشکار است.

M(x): x مربی است.

E(x, y): x مورد اعتماد y است.

کدام مورد بهترین ترجمه برای عبارت زیر است:

«هر کسی مورد اعتماد ورزشکاران است، مورد اعتماد حداقل یک مربی است.»

$$\begin{array}{ll} (۱) \forall x (\forall y (S(y) \wedge E(x, y)) \rightarrow \exists z (M(z) \wedge E(x, z))) & \\ (۲) \forall x (\forall y (S(y) \rightarrow E(x, y)) \rightarrow \exists z (M(z) \wedge E(x, z))) & \\ (۳) \forall x (\forall y (S(y) \rightarrow E(x, y)) \rightarrow \exists z (M(z) \rightarrow E(x, z))) & \\ (۴) \forall x (\forall y (S(y) \wedge E(x, y)) \rightarrow \exists z (M(z) \rightarrow E(x, z))) & \end{array}$$

۹۵- فرض کنیم مدل M به صورت زیر تعریف شده است:

- دامنه M مجموعه $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ است.

- نماد تابعی یک موضعی f به صورت به علاوه یک به پیمانه ۵ تغییر می شود. یعنی $f(n) = n + 1 \pmod{5}$

- نماد رابطه ای دو موضعی $R(x, y)$ به صورت کوچک تری معمولی اعداد تفسیر می شود یعنی $x < y$.

از دو عبارت زیر کدام در این مدل درست است؟

الف - $\forall x \exists y R(x, y)$

ب - $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(f(x), f(y)))$

(۲) فقط «ب»

(۱) فقط «الف»

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

۹۶- فرض کنیم مدل M به صورت زیر تعریف شده است:

- دامنه M مجموعه $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ است.

- ثابت C به α و ثابت d به β تغییر می شود.

- نماد رابطه ای یک موضعی R به صورت $R = \{\alpha, \gamma\}$ است.

- نماد رابطه ای دو موضعی S به صورت $S = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma)\}$ است.

از دو عبارت زیر کدام در این مدل درست است؟

الف - $\exists x (R(z) \wedge S(d, x))$

ب - $\forall x (R(x) \rightarrow S(d, x))$

(۲) فقط «ب»

(۱) فقط «الف»

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

۹۷- فرض کنیم مدل M به صورت زیر تعریف شده است:

- دامنه M مجموعه $\{0, 1, 2\}$ است.

- ثابت C به صفر تغییر می شود.

- نماد تابعی یک موضعی f به صورت $f(2) = 0, f(1) = 2, f(0) = 1$ است.

- نماد رابطه ای دو موضعی R به صورت $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$ است.

فرمول $\phi(x) = \forall y (R(x, y) \rightarrow R(f(y), c))$ با کدام یک از دو تابع مقدار دهی $v_1(x) = 0$ و $v_2(x) = 2$ در

مدل M درست است؟

(۲) فقط « $\forall_2$ »

(۱) فقط « $\forall_1$ »

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

۹۸- مثال زیر از استنتاج طبیعی برای سورها را در نظر بگیرید:

1. $\forall x P(x, x)$

2. $P(u, u) \quad \forall E, 1$

3. $\exists z P(u, z) \quad \exists I, 2$

4. $\forall y \exists z P(y, z) \quad ?, 1-3$

5. $\forall x P(x, x) \rightarrow \forall y \exists z P(y, z) \rightarrow I, 1-4$

به جای ؟ کدام مورد باید قرار گیرد؟

(۴) $\exists I$

(۳) $\forall I$

(۲) $\forall E$

(۱) $\exists E$

۹۹- فرمول α شامل سه گزاره اتمی A و B و C در چهار سطر جدول ارزش به صورت زیر ارزش درست و در چهار سطر دیگر ارزش نادرست دارد:

در به دست آوردن فرم نرمال عطفی (CNF) این فرمول از روی جدول ارزش، از دو عبارت زیر کدام ظاهر می شود؟

A	B	C	α
T	T	F	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

الف - $(\neg A) \vee (\neg B) \vee (\neg C)$

ب - $A \vee B \vee C$

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۱۰۰- دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف - قضیه ناتمامیت گودل نشان می دهد که هیچ سیستم استنتاجی کامل برای منطق مرتبه اول کلاسیک وجود ندارد.

ب - اگر سیستم استنتاجی ناسازگار باشد می توان هر فرمولی را در آن اثبات کرد اما ممکن است برخی از آن فرمول ها در بعضی مدل ها درست نباشند.

از این دو عبارت کدام صحیح است؟

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۱۰۱- مجموعه A را متعدی گوئیم هرگاه از $x \in y \in A$ نتیجه شود $x \in A$. دو شرط زیر را در مورد مجموعه A در نظر بگیرید:

الف - $U \subseteq A$

ب - $A \subseteq P(A)$

از این دو شرط کدام معادل متعدی بودن A است.

(۱) فقط «الف»

(۲) هر دو

(۳) فقط «ب»

(۴) هیچ کدام

۱۰۲- دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف - کاردینال مجموعه اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ با کاردینال مجموعه اعداد حقیقی برابر است.

ب - کاردینال بازه (۰, ۱) با کاردینال [۰, ۱] برابر است.

از این دو عبارت کدام درست است؟

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۱۰۳- فرض کنیم $V_0 = \emptyset$ ، $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$ و اگر β اوردینال حدی باشد $V_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} V_\alpha$.

دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف - عدد طبیعی ۲ به عنوان یک اوردینال برابر V_2 است.

ب - عدد طبیعی ۳ به عنوان یک اوردینال برابر V_3 است.

از این دو عبارت کدام درست است؟

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هر دو

(۴) هیچ کدام

۱۰۴- فرض کنیم $V_0 = \emptyset$ ، $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$ و اگر β اوردینال حدی باشد $V_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} V_\alpha$.

دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف - عدد طبیعی n به عنوان یک اوردینال عضو V_{n+1} است.

ب - $\omega = \{0, 1, 2, \dots\} \in V_{\omega+1}$ است.

از این دو عبارت کدام درست است؟

- (۱) فقط «الف»
(۲) هر دو
(۳) فقط «ب»
(۴) هیچ کدام

۱۰۵- می دانیم ω کوچک ترین اوردینال نامتناهی است. دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف - $\omega + 3 = \omega$

ب - $3 + \omega = \omega$

از این دو عبارت کدام درست است؟

- (۱) فقط «الف»
(۲) فقط «ب»
(۳) هر دو
(۴) هیچ کدام

۱۰۶- دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف - یک تابع دوسوئی (یک به یک و پوشا) بین مجموعه تمام زیرمجموعه های متناهی $\mathbb{N}$ و خود $\mathbb{N}$ وجود دارد.

ب - اگر $A \subsetneq B$ و A نامتناهی باشد آن گاه هیچ تابع دوسوئی بین A و B نمی تواند وجود داشته باشد.

از این دو عبارت کدام درست است؟

- (۱) فقط «الف»
(۲) فقط «ب»
(۳) هر دو
(۴) هیچ کدام

۱۰۷- دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف - با استفاده از اصل تصریح (Axiom Schema of Comprehension) در نظریه مجموعه ها می توان ثابت

کرد که اشتراک دو مجموعه یک مجموعه است.

ب - اصل نظم (Regularity) نتیجه می دهد که هیچ مجموعه ای عضو خودش نیست.

از این دو عبارت کدام درست است؟

- (۱) هر دو
(۲) فقط «الف»
(۳) فقط «ب»
(۴) هیچ کدام

۱۰۸- تابع $f: (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ تعریف شده براساس بسط اعشاری نامتناهی منحصر به فرد اعداد حقیقی بین صفر

و یک با ضابطه زیر تعریف شده است:

کدام یک در مورد این تابع درست است؟

$$f(0/a_1 a_2 \dots, 0/b_1 b_2 \dots) = 0/a_1 b_1 a_2 b_2 \dots$$

- (۱) یک به یک و پوشا است.
(۲) یک به یک نیست ولی پوشا هست.
(۳) یک به یک نیست پوشا هم نیست.
(۴) یک به یک است ولی پوشا نیست.

۱۰۹- فرض کنیم A مجموعه همه توابع از مجموعه اعداد گویا به $\{0, 1, 2\}$ یعنی مجموعه همه توابع $f: \mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ باشد. دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف - A با مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ هم توان است.

ب - A با مجموعه اعداد گنگ $\mathbb{Q}^C$ هم توان است.

از این دو عبارت کدام درست است؟

(۱) فقط «الف»

(۲) هر دو

(۴) فقط «ب»

(۳) هیچ کدام

۱۱۰- فرض کنیم $\omega^{(\omega)}$ مجموعه همه توابع $f: \omega \rightarrow \omega$ باشد که $\text{supp}(f) = \{n \in \omega \mid f(n) \neq 0\}$ متناهی است. برای

تابع ناصفر $f \in \omega^{(\omega)}$ قرار می دهیم $s(f) = \max(\text{supp}(f))$. سه تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(n) = \begin{cases} 42 & n = 5 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad g(n) = \begin{cases} 0 & n \in \{1, 4, 6, 7, \dots\} \\ 3 & n = 0 \\ 7 & n \in \{2, 3\} \\ 2 & n = 5 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n \in \{6, 8, 10\} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

دو عبارت زیر را در نظر بگیرید:

الف - $s(f) = s(g)$

ب - $s(g) < s(h)$

از این دو عبارت کدام درست است؟

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو

ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات:

۱۱۱- اگر R یک رابطه روی مجموعه $A = \{a, b, c\}$ با ماتریس متناظر $M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه رابطه

$R \circ R$ کدام خواص زیر را دارد؟

(۱) بازتابی و تعدی

(۲) بازتابی و تقارنی

(۳) پادتقارن و تعدی

(۴) تقارنی و تعدی

۱۱۲- فرض کنید b_n وابسته به n است. در این صورت جواب رابطه بازگشتی $a_n = b_n a_{n-1}$ کدام است؟

$$a_n = a_1 \sum_{i=2}^n b_i \quad (2)$$

$$a_n = a_1 \sum_{i=1}^n b_i \quad (1)$$

$$a_n = a_1 \prod_{i=1}^n b_i \quad (4)$$

$$a_n = a_1 \prod_{i=2}^n b_i \quad (3)$$

۱۱۳- تعداد جواب‌های صحیح نامنفی دستگاه زیر کدام است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \end{cases}$$

(۱) ۳۷

$$\binom{24}{4} + \binom{7}{2} \quad (۲)$$

$$\binom{24}{4} \cdot \binom{7}{2} \quad (۳)$$

(۴) ۳۳۶

۱۱۴- گزاره $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ هم‌ارز کدام گزاره زیر است؟

$$(p \vee q) \wedge r \quad (۲)$$

$$(p \vee q) \vee r \quad (۱)$$

$$(p \wedge q) \vee r \quad (۴)$$

$$(p \vee \sim q) \vee r \quad (۳)$$

۱۱۵- در یک امتحان دانشجو باید به ۸ سوال از ده سوال پاسخ دهد، ولی شرطی گذاشته شده است که باید دست کم به

چهار سوال از پنج سوال اول پاسخ دهد. این دانشجو به چند طریق می‌تواند به سوالات داده شده پاسخ دهد؟

(۲) ۳۵

(۱) ۲۵

$$\binom{5}{4} \binom{5}{3} \quad (۴)$$

$$\binom{5}{4} \binom{10}{8} \quad (۳)$$

۱۱۶- یک قفل دارای رمز ۳ رقمی فرد با ارقام ۱ تا ۹ است. اگر رمز قفل را نداشته باشیم و امتحان کردن هر رمز ۲ دقیقه

طول بکشد، حداکثر چند ساعت طول می‌کشد تا قفل باز شود؟

(۲) ۱۲/۵

(۱) ۱۲

(۴) ۱۳/۵

(۳) ۱۳

۱۱۷- تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ که در آن a_n تعداد کدهای n رقمی ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ است که دارای حداقل یک ۱، یک

۲ و یک ۳ می‌باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{3!}(x + x^2 + \dots)^3(1 + x + x^2 + \dots) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3!}(x + x^2 + \dots)^3 \frac{1}{1-x} \quad (۱)$$

$$e^x(e^x - 1)(e^{2x} - 1)(e^{3x} - 1) \quad (۴)$$

$$(e^x - 1)^3 e^x \quad (۳)$$

۱۱۸- فرض کنید d_n دیسک به قطرهای d_1 تا d_{2n} داریم به‌طوری‌که

$$d_1 < d_2 < \dots < d_{2n}$$

سه میله موجود است که دیسک‌های با قطر d_1 و d_3 و $\dots$ روی یکی و دیسک‌های با قطر d_2 و d_4 و $\dots$ و

d_{2n} روی دیگری قرار دارد. چند حرکت، نظیر حرکات در انتقال دیسک‌های برج هانوی لازم است، تا تمام دیسک‌ها به

میله خالی منتقل شوند؟

$$4^n - (n+1) \quad (۲)$$

$$2^{2n} - 1 \quad (۱)$$

$$4^n + n + 1 \quad (۴)$$

$$2^{2n} + 1 \quad (۳)$$

۱۱۹- اگر دنباله درجات رئوس گراف G تشکیل تصاعد هندسی بدهند و داشته باشیم $\delta = 5$ (مینیمم درجه رئوس)، همچنین این گراف p رأس و q یال داشته باشد و Δ ماکزیمم درجه رئوس آن باشد، آنگاه حاصل عبارت $pq^2(\delta - \Delta)$ برابر است با:

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲۰

(۴) ۲۲

۱۲۰- به چند طریق می توان $3n$ نفر را به سه دسته n نفری تقسیم کرد؟

$$(1) \frac{(3n)!}{3!n!}$$

$$(2) \binom{3n}{n} \binom{2n}{n} \binom{n}{n}$$

$$(3) \binom{3n}{n} \binom{2n}{n} \binom{n}{n}$$

$$(4) \frac{(3n)!}{3!(n!)^3}$$

۱۲۱- فرض کنیم $A = \frac{1}{10} \sum_{i=3}^7 \binom{i}{3} \binom{7}{i}$ ، در این صورت A در کدام بازه قرار دارد؟

$$(1) A \in [1, 30]$$

$$(2) A \in (30, 60]$$

$$(3) A \in (60, 90]$$

$$(4) A \in (90, +\infty)$$

۱۲۲- چند تابع مانند $f: \{1, \dots, 5\} \rightarrow \{1, \dots, 5\}$ وجود دارد که در شرط $i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$ صدق می کند؟

(۱) ۱۲۶

(۲) ۸۴

(۳) ۱۶۸

(۴) ۶۳

۱۲۳- فرض کنیم A تعداد رشته های به طول ۴ و با نمادهای ۰، ۱، ۲، ۳ باشد که تعداد صفرهای آن زوج است. در این صورت $\frac{A}{4}$

در کدام بازه قرار دارد؟

$$(1) [1, 15]$$

$$(2) (30, 45]$$

$$(3) [15, 30]$$

$$(4) (45, +\infty)$$

۱۲۴- فرض کنیم A تعداد توابع پوشای $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$ باشد. در این صورت $\frac{A}{3^6}$ در کدام بازه قرار دارد؟

(۱) $[1, 15]$

(۲) $(15, 30]$

(۳) $(30, 45]$

(۴) $(45, +\infty)$

۱۲۵- فرض کنیم A ضریب x^{14} در عبارت $(x^2 + \frac{1}{x})^{10}$ باشد. در این صورت $\frac{A}{5}$ در کدام بازه قرار دارد؟

(۱) $[9, +\infty)$

(۲) $[3, 6)$

(۳) $[6, 9)$

(۴) $[0, 3)$

۱۲۶- دو عبارت زیر را در مورد گراف‌ها در نظر می‌گیریم:

(a) هر درخت حداکثر یک تطابق کامل دارد.

(b) فرض کنیم G گراف ساده با $2n$ رأس باشد که درجه هر رأس آن بزرگ‌تر یا مساوی $n+1$ است. در این صورت G تطابق کامل دارد.

از این دو عبارت کدام درست است؟

(۱) فقط (a)

(۲) فقط (b)

(۳) هر دو

(۴) هیچ‌کدام

۱۲۷- فرض کنیم $x(G)$ عدد رنگی گراف G باشد. دو عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

(a) اگر G گراف مسطح با حداقل ۳ رأس باشد، که K_3 زیر گراف G نیست، آنگاه $x(G) \leq 4$.

(b) اگر G گراف مسطح با حداقل ۳ رأس باشد که K_4 زیر گراف G نیست، آنگاه $x(G) \leq 3$.

از این دو عبارت کدام درست است؟

(۱) فقط (a)

(۲) فقط (b)

(۳) هر دو

(۴) هیچ‌کدام

۱۲۸- فرض کنیم G یک گراف همبند است که دور اویلری (Euler Tour) دارد. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

(a) اگر G تعداد زوج رأس داشته باشد، آنگاه تعداد زوج یال دارد.

(b) اگر e و f دو یال باشند که در رأسی مشترک هستند، آنگاه G دور اویلری دارد که در آن e و f به‌طور متوالی آمده باشند.

از دو گزاره فوق کدام درست است؟

(۱) فقط (a)

(۲) فقط (b)

(۳) هر دو

(۴) هیچ‌کدام

۱۲۹- فرض کنیم A تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $a+b+c=40$ باشد که a زوج، $b \leq 4$ و $c \geq 1$ است.

در این صورت $\frac{A}{16}$ در کدام بازه قرار دارد؟

(۱) $[1, 2)$

(۲) $[2, 4)$

(۳) $[4, 6)$

(۴) $[6, +\infty)$

۱۳۰- فرض کنیم $C(x)$ تابع مولد دنباله زیر باشد:

$$c_0 = 1, c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i \quad (n \geq 0)$$

اگر $C(x) = \frac{1-x}{1-ax}$ ، آنگاه a برابر است با:

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵